

Title	非線形要素を持つサーボ機構の振動現象に関する研究(Dissertation_全文)
Author(s)	平井, 一正
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	1963-03-23
URL	<a href="http://dx.doi.org/10.14989/162021">http://dx.doi.org/10.14989/162021</a>
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	author

非線形要素を持つサーボ機構  
の振動現象に関する研究

平 井 一 正

# 非線形要素を持つサーボ機構 の振動現象に関する研究

平 井 一 正

昭和37年3月

DOC

1962

1

電気系

# 目 次

内容梗概 .....	1
第1章 クーロン摩擦を持つサーボ機構の振動現象 .....	5
1. 緒 言 .....	5
2. 出力速度の基本式 .....	6
3. 出力に停滯現象を生ずる限界 .....	11
4. 出力速度の周波数特性 .....	13
4・1. 振幅特性 .....	14
4・2. 位相特性 .....	15
5. 実験結果 .....	16
6. 高次系における振動現象 .....	18
7. 結 言 .....	22
第2章 クーロン摩擦とリレー要素を持つサーボ機構の 振動現象 .....	23
1. 緒 言 .....	23
2. 自励振動 .....	23
3. 強制振動 .....	30
3・1. 基本式 .....	30
3・2. 基本調波振動の発生限界 .....	32
3・3. 出力速度波形 .....	35
3・4. 位相特性 .....	36
4. 同期振動の安定問題 .....	37
5. 自励振動の図式解法 .....	45
5・1. 図式解の原理 .....	45
5・2. 特性量, (2・59), (2・60)式の計算 .....	46
5・3. 数値計算例 .....	47

6. 結 言	49
第3章 クーロン摩擦とむだ時間を持つサーボ機構の振動現象	50
1. 緒 言	50
2. サーボ機構の電気部分にむだ時間がある場合	50
2.1. 自励振動の解析	50
2.2. 自励振動の安定問題	54
2.3 位相面による解析	57
3. リレーの切りかえにむだ時間がある場合	61
3.1. 強制振動	62
3.1.1. 出力に停滞を生じない場合の基本調波振動	62
3.1.2.       "       を生ずる場合の       "	68
3.1.3.       "       を生ずる限界	71
3.2. 自励振動	72
3.2.1. 自励振動の発生限界	73
3.2.2. 自励振動の角周波数	75
3.2.3. 自励振動波形	76
3.3. 周期振動の安定問題	76
4. 結 言	83
第4章 リレー要素とバックラッシュ要素を持つサーボ機構の振動現象	85
1. 結 言	85
2. リレーの切りかえにむだ時間がない場合	85
2.1. 基本式	85
2.2. 強制振動	88
2.2.1. 理想的リレー特性の場合	88
2.2.2. リレー特性にヒステリシスのある場合	91
2.3. 自励振動	93

3. リレーの切りかえにむだ時間がある場合	94
3.1. 基本式	94
3.2. 強制振動	95
3.2.1. 理想的リレー特性の場合	95
3.2.2. リレー特性にヒステリシスのある場合	98
3.3. 自励振動	101
4. 周期振動の安定問題	102
5. 結 言	107

第5章 クーロン摩擦とバックラッシュ要素を持つサーボ機構 の振動現象	109
1. 緒 言	109
2. 負荷に慣性を考慮した場合の自励振動	110
2.1. サーボ機構の構成	110
2.2. 基本式	111
2.3. 分離域と結合域の境界	116
2.4. 位相面による自励振動の解析	117
3. 負荷に慣性を考慮しない場合の自励振動	121
3.1. 基本式	121
3.2. 自励振動の解析	123
3.3. 自励振動の安定問題	125
3.4. クーロン摩擦の自励振動に対する影響	127
4. 結 言	129

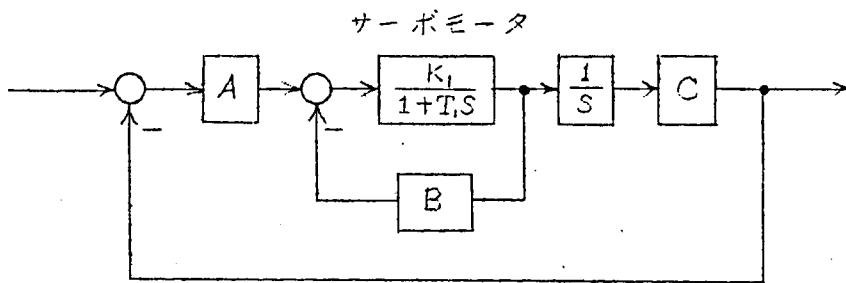
謝 辞	130
-----	-----

付 録	
付録 1. (1.8) 式の誘導	131
付録 2. (2.26) 式 ～ (2.28) 式の証明	135



## 内 容 梗 概

電子管式自動平衡機器，X，Yレコーダ，又はサーボ計算器などに広く用いられている位置制御を目的とする電気式サーボ機構の動作を正確に論じようとする場合には，これに含まれるサーボ増幅器の飽和，機械的摺算部分やモータ軸受けの摩摺，および連結歯車のバックラッシュ等の非線形要素を無視することができない。これらの非線形要素を考慮してサーボ機構の構成図をかくと，下図のようになる。図中要素Aはサーボ



モータの増幅器であつて，飽和要素，または誤差信号の極性によつてさ  
りかわるリレー要素よりなる。なお，増幅器のゲインの高い場合には，  
これをリレー要素と考える事もできる。要素Bはサーボモータの軸受け，  
直流サーボモータの場合なら整流子とブラシ間の機械的摺算部分に存在  
する非線形摩摺であつて，静止摩摺およびクーロン摩摺がこれにあたる。  
さらに要素Cは連結歯車のバックラッシュ要素である。

本研究においては，これらの非線形要素がサーボ機構の動作におよぼ  
す影響について考察し，系に発生する強制振動，自励振動について論じ  
た。

まず，第1章ではクーロン摩摺以外は線形と考え，このサーボ機構に  
正弦波入力信号を印加した場合の出力速度を理論的に解析し，その波形，  
周波数特性および出力のクーロン摩摺による停滯を生ずる限界を求め，



これらがクーロン摩擦によつてうける影響を明らかにした。またこの理論的結果を交流二相サーボモータを用いた小型サーボ機構による実験結果と比較するとともに、さらに系の電気部分の時定数を考慮した三次のサーボ機構について同様の解析を行なつた。

第2章では、クーロン摩擦を持つサーボモータをリレー制御する場合を考察した。すなわち、系に発生する自励振動、強制入力に対する基本調波振動をリレー特性が理想的な場合、さりかえにヒステリシスのある場合について解析し、これら周期振動の正確な波形および発生領域を求めた。またこのような周期振動の安定問題を考察し、さらに自励振動の場合について、その角周波数を系の線形部の伝達関数とパラメータとから図式的に求める近似解法について考察した。

第3章では、このサーボ機構にむだ時間が存在する場合、系に発生する振動のクーロン摩擦による影響について考察した。サーボ機構にあるむだ時間として、系の電気部分に存在するむだ時間、および前章のようにサーボモータをリレー制御するときリレーのさりかえに存在するむだ時間の2つについて考慮した。すなわち、電気部分にむだ時間が存在する系について自励振動角周波数、発生限界のクーロン摩擦による影響を考察し、自励振動の安定問題を取扱ひ、さらに、このようなむだ時間のある系を位相面で解析し、アナログ計算機でたしかめた。また、リレーの切りかえにむだ時間のある場合についても同様に自励振動の角周波数、発生限界のクーロン摩擦による影響について、また、この系に強制入力を印加した場合の基本調波振動の発生限界、出力波形等について考察し、さらにこれらの振動の安定問題について論じた。

第4章および第5章では、バックラッシュ要素を持つサーボ機構に他の非線形要素がある場合、系に発生する振動について論じた。まず第4章では、リレー要素とバックラッシュ要素を持つサーボ機構において、強制入力を印加したときの基本調波振動の発生限界、自励振動角周波数等を、リレーの切りかえにむだ時間のない場合、ある場合の各々について論じ、さらに、周期振動の安定問題についても考察した。ただし第4

章においてはサーボモータにより駆動される負荷はポテンシヨメータの接触子のように慣性を無視して差支えない場合を取扱った。

つぎに第5章においては、クーロン摩擦とバックラッシュ要素を持つサーボ機構において、この系に発生する自励振動について論じた。すなわち、負荷に慣性のある場合、ない場合の各々について考え、負荷に慣性のある場合は位相面を用いて解析し、自励振動に対するバックラッシュとクーロン摩擦の関係について考察した。負荷の慣性を無視して差支えない場合についても同様に自励振動発生限界に対するバックラッシュ要素とクーロン摩擦の関係について考察し、さらに安定問題についても論じた。

4 項欠

# 第1章 クーロン摩擦を持つサーボ機構 の振動現象<sup>(1)</sup>

## 1. 緒言

位置制御を目的とする電気式サーボ機構の動作を正確に論じる場合、これに含まれる飽和、摩擦、およびバックラッシュ等の非線形特性を無視することはできない。これらの非線形特性のうち非線形摩擦は、モータ軸受けとか、直流サーボモータの整流子とブラシの間等の機械的摺導部分には必ず存在し、制御系の動作に対するその影響を明らかにすることはサーボ機構においては特に重要であつて、この問題に関してこれまでも若干の報告がある。<sup>(2)-(7)</sup>

ここではサーボ機構に含まれる各要素は非線形摩擦を除いてはすべて線形特性をもつものとし、また、非線形摩擦としてはクーロン摩擦のみをもつものとした。そしてこのようなサーボ機構に正弦波入力信号を印加した場合について、このサーボ機構に発生する強制振動に対するクーロン摩擦の影響について論じ、このサーボ機構の正弦波入力信号に対する追従性を明らかにした。

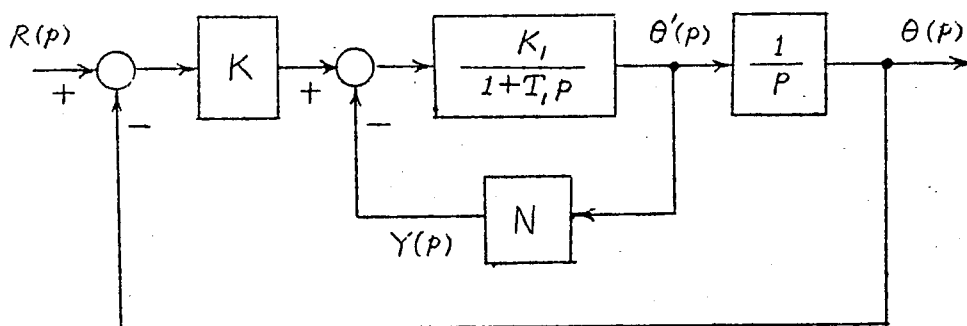
なお、クーロン摩擦のあるサーボ機構においては、その出力速度が0になつたときにトルク発生要素<sup>\*</sup>の発生トルクがこのクーロン摩擦トルクよりも小さい場合にはサーボ機構は停止し、トルク発生要素の発生トルクがクーロン摩擦トルクにうちかつまで出力に停滞現象を生じて、このサーボ機構は入力信号に応答しない。しかしながら、正弦波状強制入力を印加する場合には、サーボ機構の条件如何によつては、

---

\* サーボ増幅器の出力はサーボモータの制御巻線につながれる。制御巻線を通る電流がサーボモータの発生トルクに比例することからここではサーボ増幅器をモータの制御巻線まで含めてトルク発生要素とよぶことにする。

その出力速度が0になるところでもこのような停滯現象を生ぜず，入力信号に対して出力は連続的な応答を示すことになる。しかもこのような場合には，クーロン摩擦トルクの極性が周期的に変化するので，これをリレー特性として取扱うことができ，この場合のサーボ機構の解析は比較的容易になる。このような考え方にもとづき，この章においては正弦波入力信号に対するサーボ機構の出力速度を解析的に求め，出力に停滯現象を生ずる限界，出力速度の周波数特性等に対するクーロン摩擦の影響を論ずるとともに，さらに，これらの結果を交流二相サーボモータを用いた簡単な小形サーボ機構による実験結果と比較検討し，またサーボ機構の次数が三次の場合についても同様な解析方法が適用されることを示した。

## 2. 出力速度の基本式



第 1・1 図 クーロン摩擦のあるサーボ機構の構成図

第 1・1 図はクーロン摩擦のある簡単なサーボ機構の構成図であつて， $N$ はそのクーロン摩擦特性をあらわし，これが第 1・2 図に示すような特性をもっているものとする。これらの図に於いて  $K$  はトルク発生要素のゲイン， $T_t$  はサーボモータの線形部分の特定数， $K_t$  はそのゲインであり，また  $F$  はクーロン摩擦トルクの大さきである。また，入力  $r(t)$ ，クーロン摩擦トルク  $y(t)$ ，出力速度  $\theta'(t)$ ，出力（位置） $\theta(t)$  のラプラス変換をそれぞれ  $R(p)$ ， $Y(p)$ ， $\theta'(p)$ ， $\theta(p)$  であらわす。

いまこのサーボ機構において、入力信号  $r(t)$  として

$$r(t) = A \sin(\omega_a t + \xi) \quad (1.1)$$

を印加すれば、出力に停滞現象を生じない場合のこのサーボ機構の動作は、

$$\begin{aligned} T_1 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + KK_1 \theta + K_1 F \operatorname{sgn} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \\ = KK_1 A \sin(\omega_a t + \xi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

なる微分方程式であらわされる。

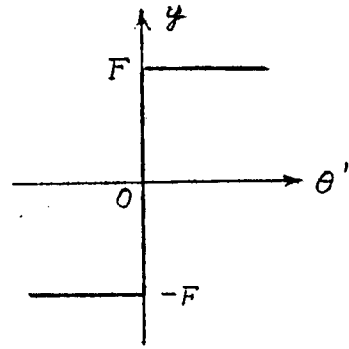
ここで

$$\frac{1}{T_1} = 2\zeta\omega_o, \quad \frac{KK_1}{T_1} = \omega_o^2, \quad \frac{\omega_a}{\omega_o} = \omega, \quad \omega_o t = \tau \quad (1.3)$$

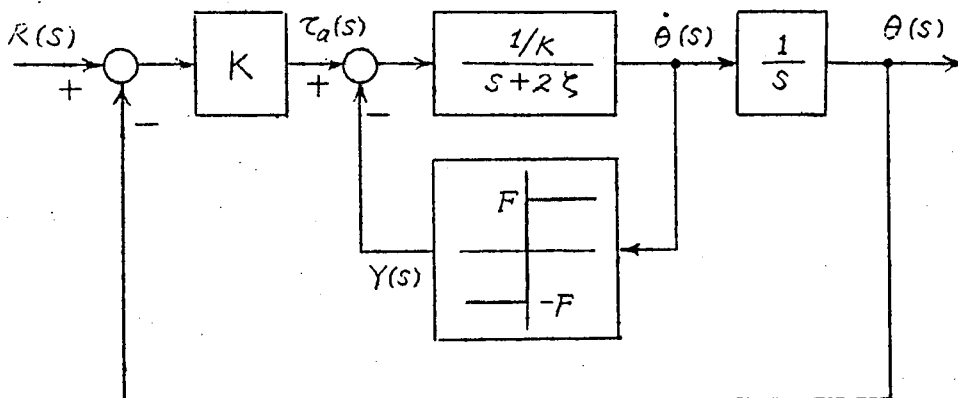
とおいて(1.2)式を無次元化すると

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\dot{\theta} + \frac{F}{K} \operatorname{sgn} \dot{\theta} = A \sin(\omega\tau + \xi), \quad \cdot \equiv d/d\tau \quad (1.4)$$

となる。したがって(1.4)式を用いて第1.1図のサーボ機構の構成図を第1.3図のように変換することができる。ただし入力  $r(\tau)$ 、クーロン摩擦トルク  $y(\tau)$ 、サーボモータへの入力トルク  $\tau_a(\tau)$ 、出力速度  $\dot{\theta}(\tau)$ 、出力(位置)  $\theta(\tau)$  のラプラス変換をそれぞれ  $R(s)$ 、 $Y(s)$ 、

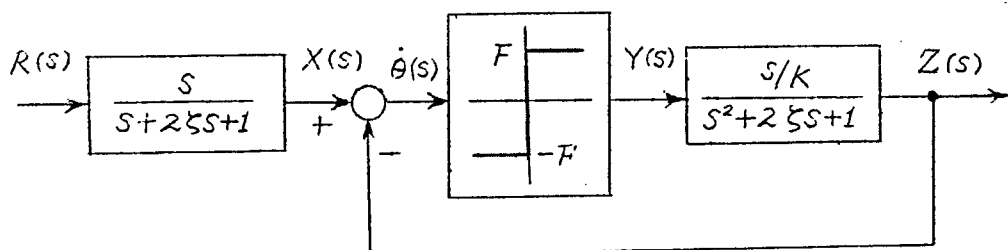


第1.2図 クーロン摩擦特性



第1.3図 構成図の変換

$\tau_a(s)$ ,  $\dot{\theta}(s)$ ,  $\theta(s)$ であらわす。さらにこの構成図を第1.4図のように変換する。



第1.4図 変換された構成図

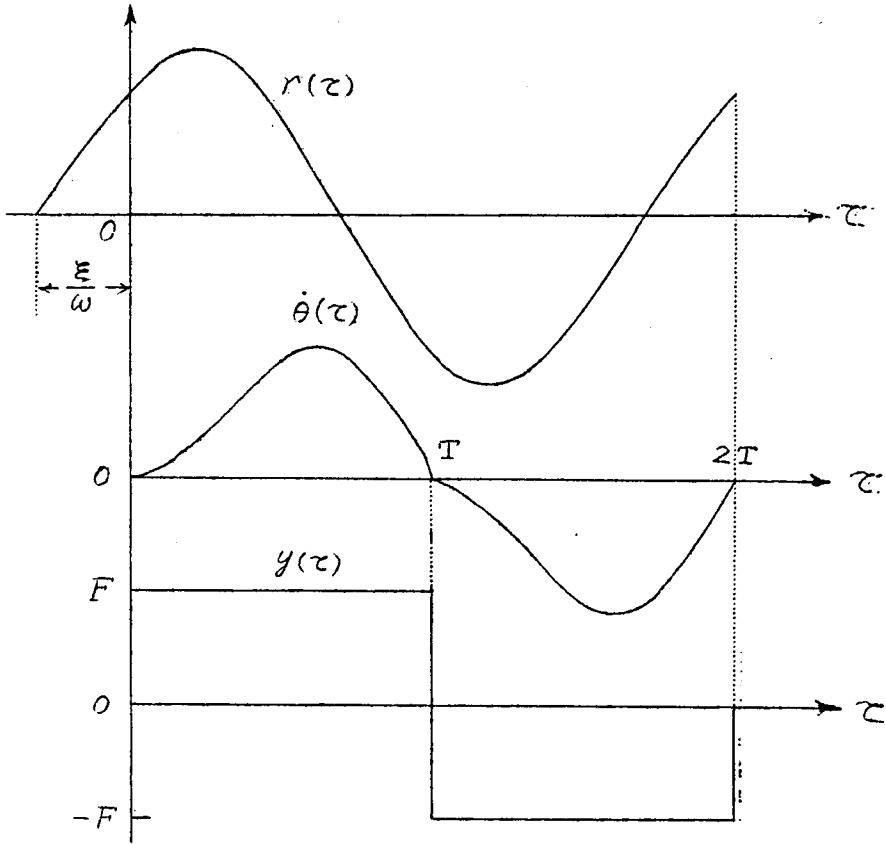
この図をみればあきらかなように、周期的定常状態においてはクーロン摩擦のあるサーボ機構を1種のリレー制御系として取扱うことができる。すなわち、もとのサーボ機構の出力速度  $\dot{\theta}(\tau)$  は第1.4図において

$$\dot{\theta}(\tau) = x(\tau) - z(\tau)$$

として求められる。ただし  $x(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$  である。この  $x(\tau)$  は時間が充分経過した定常状態においては

$$\left. \begin{aligned} x(\tau) &= \frac{\omega A}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}} \sin(\omega\tau + \xi + \psi), \\ \text{ただし} \\ \psi &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega}{1-\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

となり、これが第1.4図のクーロン摩擦を含む閉回路の入力として加わることになる。そこでこのサーボ機構の速度が入力信号と同一角周波数の振動をする場合には、このような周期的定常状態における速度波形は第1.5図に示すように  $T = \pi/\omega$  を半周期として周期的に変化し、その符号は各半周期の初めは変化しない。したがってクーロン摩擦トルク  $\gamma(\tau)$  も図のように周期的に変化する方形波列となる。なお、第1.5図においては時間の原点を移して、定常状態における速度波形の正の半サイクル



第1.5図 出力速度とクーロン摩擦トルクの時間的変化

が、 $\tau=0$ からはじまるものとしており、したがって  $\tau=0$  での入力信号  $r(\tau)$  の位相角が  $\xi$ 、 $x(\tau)$  の位相角が  $\xi+\psi$  となる。

さて第1.5図に示すように周期的に変化する方形波  $y(\tau)$  をラプラス変換すると  $y(\tau)$  のラプラス変換  $Y(s)$  は

$$Y(s) = \frac{F}{s} \frac{1 - \exp(-Ts)}{1 + \exp(-Ts)} \quad (1.6)$$

となり、<sup>(8)</sup>したがって  $z(\tau)$  のラプラス変換  $Z(s)$  は

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{s/k}{s^2 + 2\zeta s + 1} Y(s) \\ &= \frac{F}{K} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} \cdot \frac{1 - \exp(-Ts)}{1 + \exp(-Ts)} \end{aligned} \quad (1.7)$$



となる。(1.7)式を逆変換して時間関数  $z(\tau)$  を求めると、定常状態において

$$z(\tau) = \frac{F}{K} \cdot \frac{2}{\beta} \exp(-\zeta\tau) \cdot \frac{\sin\beta\tau - \exp(-\zeta T) \sin\beta(T-\tau)}{1 + 2\exp(-\zeta T) \cos\beta T + \exp(-2\zeta T)}, \quad 0 \leq \tau \leq T \quad (1.8)$$

ただし

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

となる。<sup>\*</sup>したがって出力速度  $\dot{\theta}(\tau)$  は(1.5), (1.8)両式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}(\tau)}{A} &= \frac{1}{A} \{ x(\tau) - z(\tau) \} \\ &= B_1 \sin(\omega\tau + \xi + \psi) - B_2 \exp(-\zeta\tau) \sin(\beta\tau - \varphi_1), \quad 0 \leq \tau \leq T \end{aligned} \quad (1.9)$$

ただし

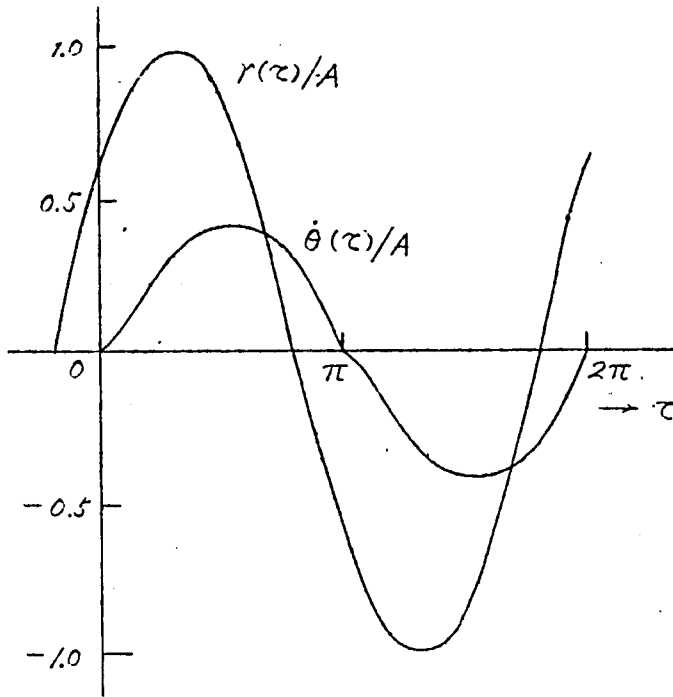
$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}} \\ B_2 &= \frac{F}{KA} \cdot \frac{2}{\beta} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\exp(-\zeta T) \cos\beta T + \exp(-2\zeta T)}} \\ \varphi_1 &= \tan^{-1} \frac{\exp(-\zeta T) \sin\beta T}{1 + \exp(-\zeta T) \cos\beta T} \end{aligned}$$

となる。 $T \leq \tau \leq 2T$  における出力速度は(1.9)式で与えられる  $0 \leq \tau \leq T$  における速度波形の正負の符号を反転して得られる。また  $\tau=0, \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$  において  $\dot{\theta}(\tau)=0$  となるので、この関係を用いて(1.9)式から

$$\xi = -\psi - \sin^{-1} \left( \frac{B_2}{B_1} \sin\varphi_1 \right) \quad (1.10)$$

を得る。したがって  $\omega, \zeta$  および  $F/KA$  の値を適当に与えれば(1.9), (1.10)両式から入力信号  $x(\tau)$  に対するこの場合の出力速度波形  $\dot{\theta}(\tau)/A$  を求めることができる。第1.6図は  $\omega=2, \zeta=0.6, F/KA=0.2$  と

\* 式の誘導については付録1.参照のこと。



第1.6図 出力速度波形(計算値)

して求めた速度波形の1例を示すものである。

なお, 出力の加速度  $\ddot{\theta}(\tau)$  は(1.9)式を時間  $\tau$  について微分して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{\theta}(\tau)}{A} &= B_1 \omega \cos(\omega\tau + \xi + \psi) - B_2 \exp(-\zeta T) \cos(\beta\tau - \varphi_1 + \varphi_2) \\ \text{ただし} \quad \varphi_2 &= \tan^{-1} \zeta / \beta \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

となる。

### 3. 出力に停滯現象を生ずる限界

さきにも述べたように, 第1.5図で出力速度  $\dot{\theta}(\tau)$  が零になる時点  $\tau=0, \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$  において, トルク発生要素の発生トルク  $\tau_q(\tau)$  の絶対値がクーロン摩擦トルク  $F$  より大きい場合には, 出力に停滯現象

を生ずることはないが、この時侯で  $|\tau_a| < F$  の場合には、 $|\tau_a| = F$  になるまで出力速度は零にとどまって出力に停滞現象を生ずることになる。したがって出力に停滞現象を生ずる限界は

$$\tau_a(+0) = F \quad (1.12)$$

で与えられる。しかるに

$$\tau_a(+0) = \ddot{\theta}(+0) + 2\zeta \dot{\theta}(+0) + F, \quad (1.13)$$

であり、また

$$\dot{\theta}(+0) = 0 \quad (1.14)$$

であるから (1.12) ~ (1.14) 式より

$$\ddot{\theta}(+0) = 0 \quad (1.15)$$

を得る。(1.14) 式および (1.15) 式が、出力に停滞現象を生ずる限界条件を与える。いま (1.15) 式の関係を先に求めた (1.11) 式を用いて書きなおすと

$$\cos(\xi + \psi) = \frac{B_2}{\omega B_1} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.16)$$

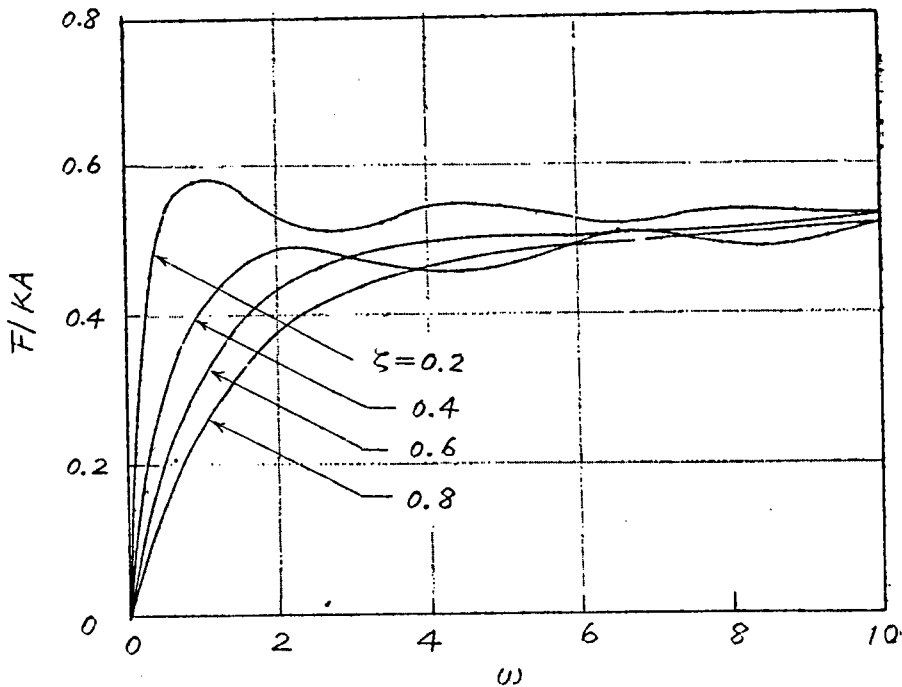
となる。そこで (1.14) 式を満足する条件としてすでに求めた (1.10) 式とこの (1.16) 式を用いると、

$$\left(\frac{B_2}{B_1}\right)^2 \left\{ \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{\omega^2} \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \right\} = 1 \quad (1.17)$$

となる。なお (1.9), (1.11) 両式に示されている  $\varphi_1$  および  $\varphi_2$  を用いると

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \frac{\exp(-\zeta T) \sin \beta T}{\sqrt{1 + 2 \exp(-\zeta T) \cos \beta T + \exp(-2\zeta T)}} \\ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) &= \frac{\beta \{1 + \exp(-\zeta T) \cos \beta T\} + \exp(-\zeta T) \sin \beta T}{\sqrt{1 + 2 \exp(-\zeta T) \cos \beta T + \exp(-2\zeta T)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

が得られる。(1.17) 式は出力に停滞現象を生ずる限界における  $T$  すなわち  $\omega$  と  $F/K_A$  の関係を与える条件である。(1.18) 式を用いて  $\zeta$  をパラメータとして (1.17) 式の与える限界曲線を示したものが第 1.7 図であって、これらの曲線より上の領域では出力に停滞現象を生じ、下の領



第 1.7 図 出力に停滯を生ずる限界

域では停滯現象を生じない。この図から高周波域では出力に停滯現象を生じない領域はどの値によってほとんど変化しないが、低周波域ではどの値が小さいほど出力に停滯現象を生じない領域がひろがることわかる。

#### 4. 出力速度の周波数特性

出力速度波形は (1.9) 式からわかるように正弦波ではないので、その基本波成分を求めてこれを正弦波入力信号と比較すれば、このサーボ機構を等価的に線形化した場合の出力速度の周波数応答が得られる。ここではこのような意味での周波数応答には触れず、(1.9) 式で与えられる出力速度波形の最大振幅によってその振幅特性を、出力速度が零になる時点での入力信号との位相差によってその位相特性を考察することにす

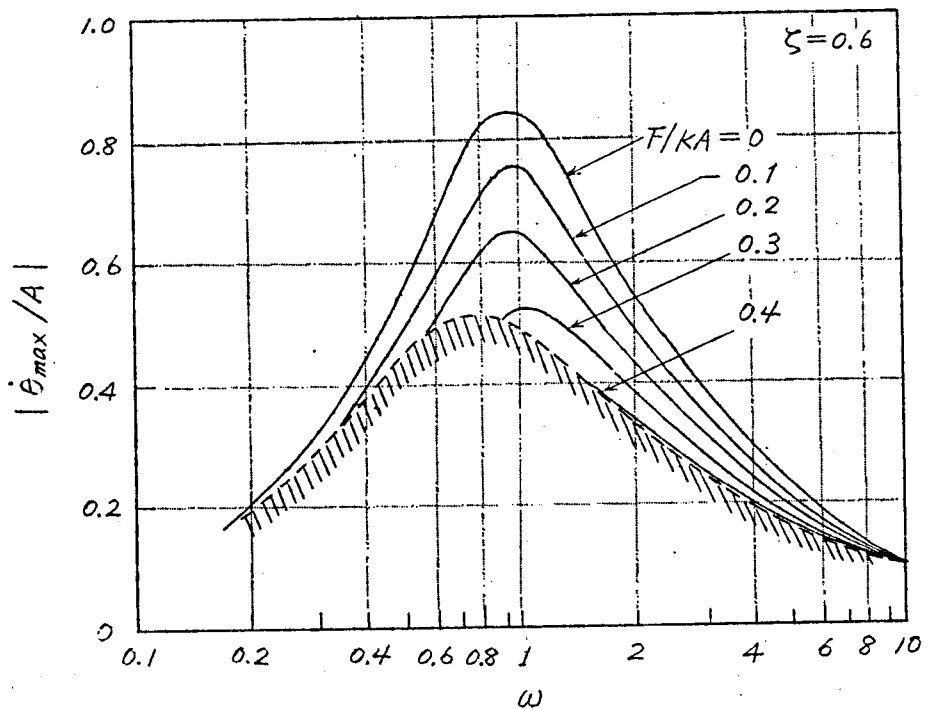
る。このようにすると正弦波とは異なる歪波形を対象とする場合には、クーロン摩擦による影響を見失うことなく実験結果との比較が容易になる。

#### 4.1. 振幅特性

さて入力信号の角周波数  $\omega$  を変化させて、出力速度の最大振幅  $|\dot{\theta}_{max}|$  と、入力信号の振幅  $A$  との比を求め、これらの比についての振幅特性を考えると、この比は (1.9), (1.10) 両式を用いて計算できる。すなわち、出力速度  $\dot{\theta}(\tau)$  が最大になる時点をと  $\tau = \tau_{max}$  とすれば、これは (1.11) 式から

$$B_1 \omega \cos(\omega \tau + \xi + \psi) - B_2 \exp(-\zeta \tau) \cos(\beta \tau - \varphi_1 + \varphi_2) = 0 \quad (1.19)$$

を満足するはずである。そこで (1.19) 式を満足する  $\tau = \tau_{max}$  を求め

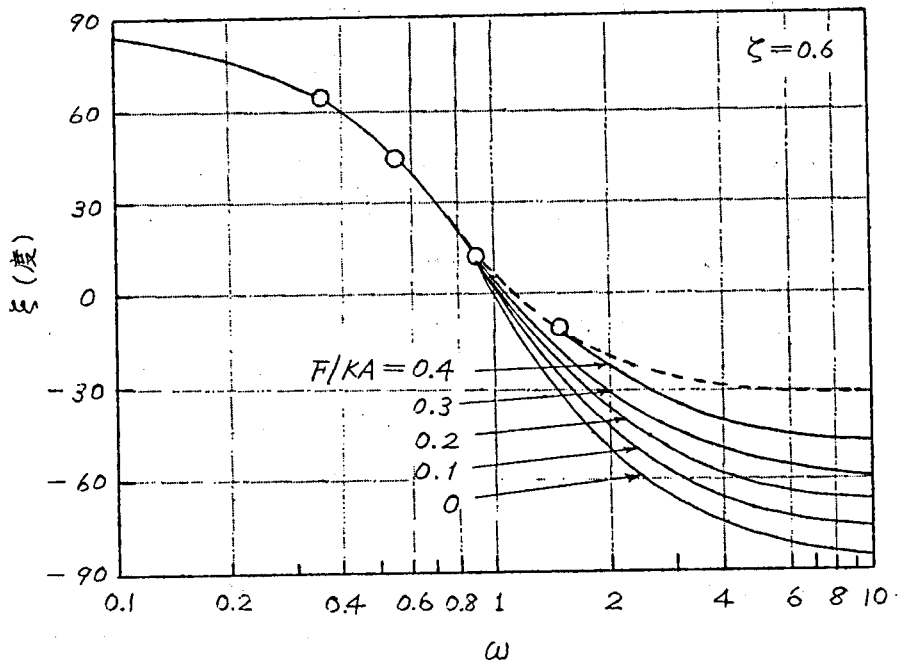


第1.8図 クーロン摩擦を持つサーボ機構の振幅特性  
(出力速度の最大振幅と入力信号の振幅の比)

てこれを(1.9)式に代入すれば、これが求める  $|\dot{\theta}_{max}/A|$  を与えることとなる。と  $F/KA$  をパラメータとして  $\omega$  と  $|\dot{\theta}_{max}/A|$  との関係の1例を図示すれば第1.8図の曲線のようになり、このサーボ機構の固有角周波数の近傍で利得が最大になることがわかる。 $F/KA$  の値が大きくなると利得が低下し、ついには出力に停滞現象を生ずるようになる。図中斜線を施した部分で出力に停滞現象を生ずるようになる。なお、 $F/KA=0$  なる曲線はクーロン摩擦のない線形系に対するものである。

#### 4.2. 位相特性

つぎに入力信号が零になる時点と、これと同じ極性で出力速度が零になる時点との与える位相差をとって位相特性を考えると、この位相差はすでに(1.10)式に示したようになる。そこで(1.10)式に(1.9)、(1.11)両式に与えられている  $B_1, B_2, \varphi_1$  および  $\psi$  を代入すると、



第1.9図 クーロン摩擦をもつサーボ機構の位相特性

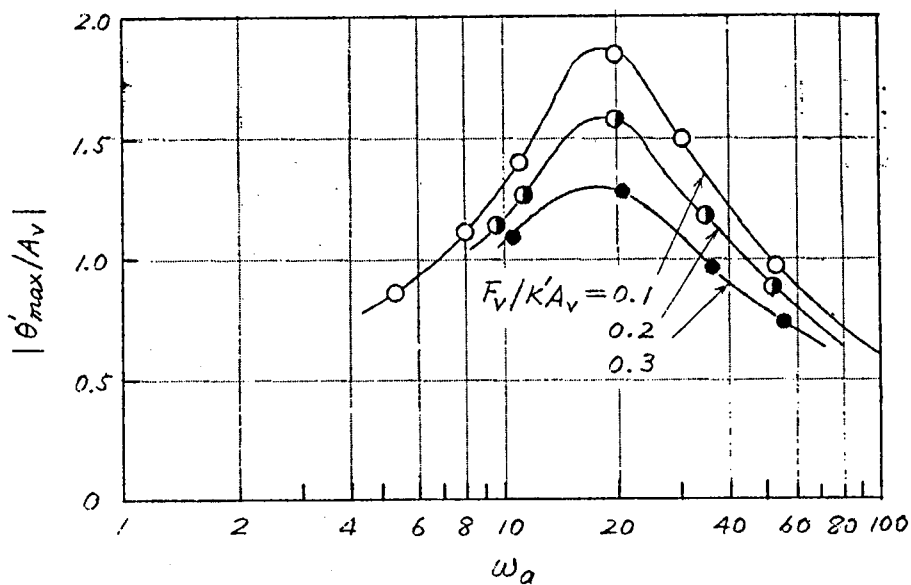
$$\xi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega}{1-\omega^2} - \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left\{ \frac{F}{KA} \frac{2}{\beta} \frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}} \right. \\ \left. \times \frac{\exp(-\zeta T) \sin \beta T}{1 + 2\exp(-\zeta T) \cos \beta T + \exp(-2\zeta T)} \right\} \quad (1.20)$$

となる。(1.20)式より、 $\zeta$ と $F/KA$ を与えて $\omega$ と $\xi$ の関係を求めると、第1.9図のような位相特性を得る。図中 $F/KA=0$ の曲線は前節の場合と同様にクーロン摩擦のない線形系に対するものである。 $F/KA$ の値が大きくなるほど高周波域では線形系よりも位相が進むようになり、また低周波域では各曲線に対して丸印で示した点よりも低い角周波数に対して出力に停滞現象を生ずるようになる。図中の破線は出力に停滞現象を生ずる限界を示している。

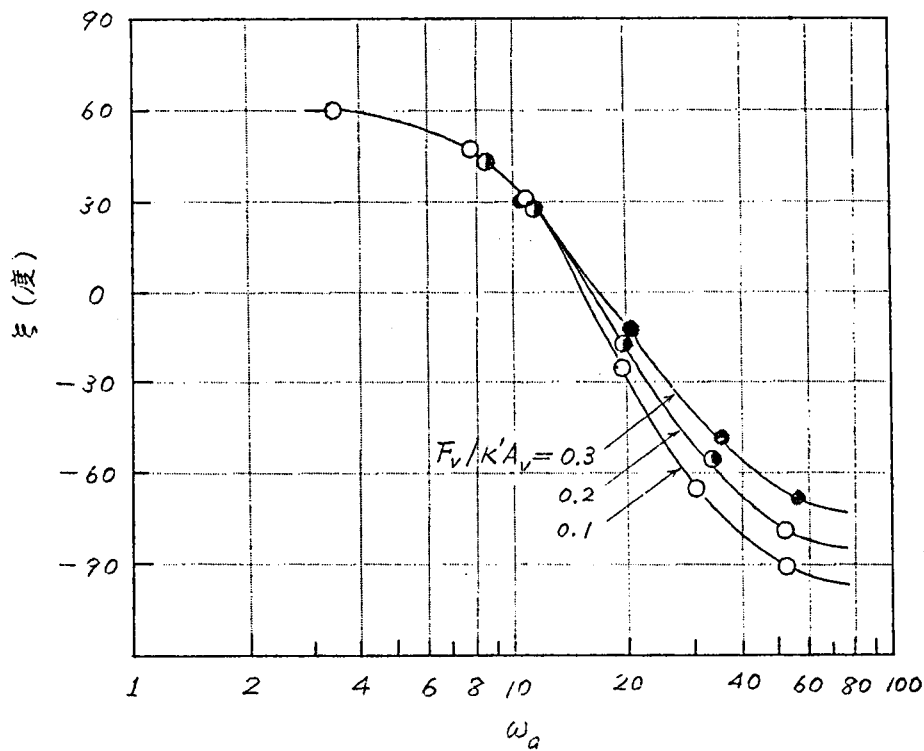
## 5. 実験結果

次には交流二相サーボモータを用いた簡単な小形サーボ機構に、正弦波入力信号を印加してその出力速度を測定し、先に述べたような振幅特性および位相特性を求めた結果について簡単に述べる。

クーロン摩擦トルクはサーボモータ軸に取り付けた円板の周辺をバネで押し、その強さを加減することによって変化させた。このようにしたとき、静止摩擦トルクがクーロン摩擦トルクに等しい場合には、クーロン摩擦トルクは等価的にサーボモータが動きはじめるとき、あるいはこれが停止するときのその制御巻線への入力電圧 $F_v$ によって表わすことができる。そこでサーボ増幅器の利得を $K'$ 、このサーボ機構の正弦波入力信号電圧の振幅を $A_v$ とすれば、前章までに用いた $F/KA$ の値は $F_v/K'A_v$ で与えられることになる。なお、出力速度はサーボモータ軸に直結した誘導形速度発電機の出力電圧から求めた。そこで $F_v$ の値が一定(10V)となるように調整し、入力信号電圧の角周波数 $\omega_a$ と振幅 $A_v$ の値を変化させて前章にのべた意味での出力速度の振幅特性および位相特性を測定した結果を示すと、それぞれ第1.10図および第1.11



第 1.10 图 振幅特性 (实验值:  $\omega_0 = 18.8$ )



第 1.11 图 位相特性 (实验值:  $\omega_0 = 18.8$ )

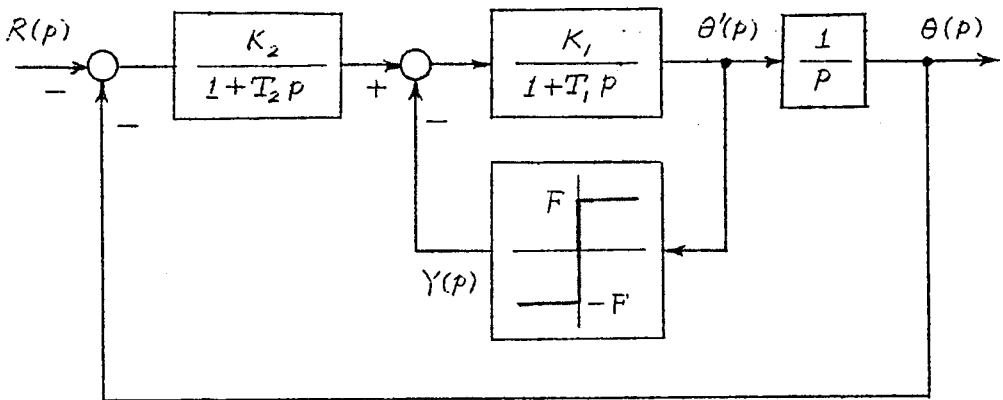


図のようになる。

これを第1・8図および第1・9図の計算結果と比較すると、傾向として相当よい一致を示している。なお、実際の測定においては高周波域においては搬送波の影響と相まってサーボ機構の電気部分の位相おくれが無視できない程度に大きくなる。また、出力に停滞現象を生ずる限界を適確に見出すことは非常に困難である。

## 6. 高次系における振動現象

前節までの論議においては、トルク発生要素の時定数を無視したのであるが、これを考慮すると第1・1図に示したクーロン摩擦のあるサーボ機構の構成図は第1・12図のよりになり、この場合にも前節までに述べ



第1・12図 クーロン摩擦のある高次サーボ機構

たのと同様な解析方法によりこの系の動作を解析することができる。次にはこのような場合のサーボ機構の動作について簡単に考察する。

さて第1・12図において入力信号を前と同様に(1・1)式であらわされるとすれば、出力に停滞現象を生じない場合には

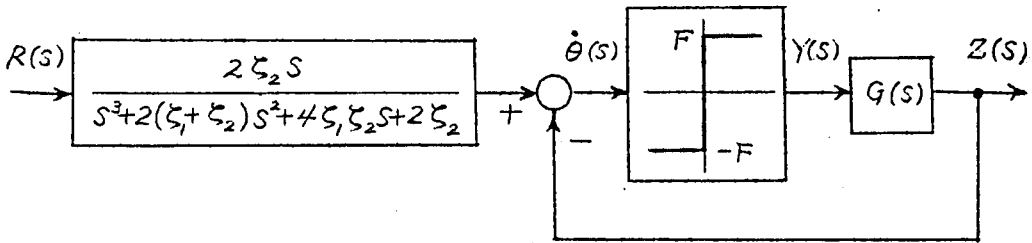
$$T_1 T_2 \frac{d^3 \theta}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + K_1 K_2 \theta + K_1 F \operatorname{sgn} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = K_1 K_2 A \sin(\omega_d t + \xi) \quad (1.21)$$

となる。そこで

$$\frac{1}{T_1} = 2\zeta_1\omega_0, \quad \frac{1}{T_2} = 2\zeta_2\omega_0, \quad \frac{K_1K_2}{T_1} = \omega_0^2, \quad \frac{\omega_a}{\omega_0} = \omega, \quad \omega_0 t = \tau \quad (1.22)$$

において(1.21)式を無次元化すると、前と同様にして第1.12図の構成図を第1.13図のように変換することができる。ここで

$$G(s) = \frac{1}{K_2} \frac{s(s+2\zeta_2)}{s^3 + 2(\zeta_1 + \zeta_2)s^2 + 4\zeta_1\zeta_2s + 2\zeta_2} \quad (1.23)$$



第1.13図 変換された高次サーボ機構の構成図

である。いま

$$s^3 + 2(\zeta_1 + \zeta_2)s^2 + 4\zeta_1\zeta_2s + 2\zeta_2 = (s+a)(s^2+bs+c)$$

なる形に因数分解すれば  $G(s)$  は

$$G(s) = \frac{1}{K_2} \left( \frac{d}{s+a} - \frac{gs+h}{s^2+bs+c} \right)$$

ただし

$$d = \frac{2\zeta_2 - a}{b - c/a - a}$$

$$g = \frac{2\zeta_2 - b + c/a}{b - c/a - a}$$

$$h = cd/a$$

(1.24)

となる。

周期的定常状態においては、クーロン摩擦トルク  $y(\tau)$  は  $T = \pi/\omega$  を半周期として周期的に変化する方形波列となるので、時間関数で表わ

した  $G(s)$  の出力  $Z(\tau)$  は前と同様にして

$$\begin{aligned} Z(\tau) = & \frac{F}{K_2} \frac{d}{a} \left\{ 1 - \left( 1 + \tanh \frac{aT}{2} \right) \exp(-a\tau) \right\} \\ & - \frac{F}{K_2} g N (D \sin \gamma \tau + E \cos \gamma \tau) \exp\left(-\frac{b}{2} \tau\right) \\ & - \frac{F}{K_2} h' \left[ 1 + N \left\{ \left( \gamma E - \frac{b}{2} D \right) \sin \gamma \tau - \left( \gamma D + \frac{b}{2} E \right) \cos \gamma \tau \right\} \right. \\ & \quad \times \left. \exp\left(-\frac{b}{2} \tau\right) \right], \quad (0 \leq \tau \leq T) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} D &= 1 + \exp(-bT/2) \cos \gamma T, \\ E &= -\exp(-bT/2) \sin \gamma T, \\ N &= \frac{2}{\gamma} \frac{1}{1 + 2 \exp(-bT/2) \cos \gamma T + \exp(-bT)}, \\ r &= \sqrt{c - (b/2)^2}, \quad h' = h/\sqrt{c} \end{aligned} \quad (1.25)$$

となる。(付録1, 参照)

一方, 周期的定常状態においては

$$x(\tau) = MA \sin(\omega \tau + \xi + \phi)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{2 \zeta_2 \omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2} \sqrt{(c - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}} \\ \phi &= \frac{\pi}{2} - \left( \tan^{-1} \frac{\omega}{a} + \tan^{-1} \frac{b\omega}{c - \omega^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

となるから, (1.25), (1.26) 両式より出力速度は

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}(\tau)}{A} &= \frac{1}{A} \left\{ x(\tau) - Z(\tau) \right\} \\ &= M \sin(\omega \tau + \xi + \phi) - \frac{F}{K_2 A} \left[ \left( \frac{d}{a} - h' \right) - \frac{d}{a} \left( 1 + \tanh \frac{aT}{2} \right) \exp(-a\tau) \right. \\ & \quad \left. - N \exp\left(-\frac{b}{2} \tau\right) \left\{ \left( \gamma D + h' \left[ \gamma E - \frac{b}{2} D \right] \right) \sin \gamma \tau + \left( \gamma E - h' \left[ \gamma D + \frac{b}{2} E \right] \right) \cos \gamma \tau \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

で与えられる。なお、出力の加速度  $\ddot{\theta}(\tau)$  は (1.27) 式を時間  $\tau$  について微分して得られる。

クーロン摩擦のために出力に停滞現象を生ずる限界は第3節の場合と同様に

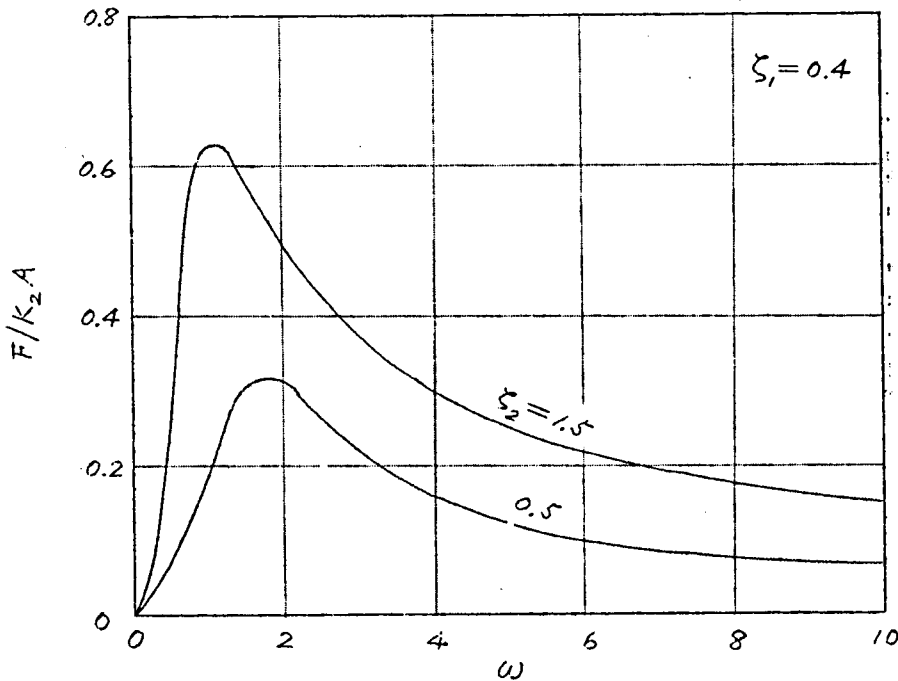
$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(+0) &= 0 \\ \ddot{\theta}(+0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

より求められる。そこで (1.27) 式を用いて

$$\left. \begin{aligned} M \sin(\xi + \phi) &= \frac{F}{K_2 A} \left\{ \left( \frac{d}{a} - n' \right) - \frac{d}{a} \left( 1 + \tanh \frac{aT}{2} \right) - NP \right\} \\ M \omega \cos(\xi + \phi) &= \frac{F}{K_2 A} \left\{ d \left( 1 + \tanh \frac{aT}{2} \right) + N \left( \frac{b}{2} P - \gamma Q \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

ただし

$$\begin{aligned} P &= -h' \gamma D + (\gamma - b h' / 2) E \\ Q &= C (\gamma - b h' / 2) D + h' \gamma E \end{aligned}$$



第 1.14 図 出力に停滞現象を生ずる限界 (三次系の場合)

を得る。この二式より  $\varepsilon + \phi$  を消去して出力に停滯現象を生ずる限界における  $\omega$  と  $F/K_2 A$  の関係を求めることができる。第1・14 図は限界曲線の1例を示すもので、 $\zeta_1 = 0.4$ 、 $\zeta_2 = 0.5$  および  $\zeta_1 = 0.4$ 、 $\zeta_2 = 1.5$  としたものであつて、この曲線より上の領域では出力に停滯現象を生じ、下の領域では停滯現象を生じない。

## 7. 結 言

以上クーロン摩擦のあるサーボ機構に正弦波入力信号を印加した場合の出力速度を理論的に解析し、その波形、周波数特性および出力に停滯現象を生ずる限界を求め、これらがクーロン摩擦によつて受ける影響をあきらかにした。またこの理論的結果を交流二相サーボモータを用いた小型サーボ機構による実験結果と比較するとともに、さらに電気部分の時定数をも考慮した高次サーボ機構について同様の解析を行なつた結果についても簡単にのべた。

以上の出力速度波形および周波数特性はいづれも出力に停滯現象を生じない場合について検討したものである。出力に停滯現象を生ずる場合でも、この出力が入力信号と同一角周波数の振動をする場合があるが、この場合の理論的解析は非常に困難であるのでここでは省略した。

## 第2章 クーロン摩擦とリレー要素を持つ サーボ機構の振動現象<sup>(9)</sup>

### 1. 緒言

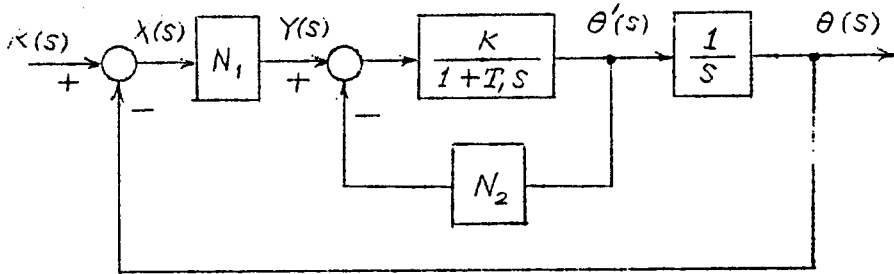
リレー制御系を構成する要素の特性がリレー要素以外はすべて線形である場合には、この制御系の動作についてはすでに詳細な検討が行なわれており、数多くの報告がある<sup>(10)-(11)</sup>。

しかしながら、実在する制御系の場合にはリレー要素以外にも非線形特性をもつ要素を含むのが普通であつて、これらの非線形要素のためにリレー制御系の動作が顕著な影響を受ける場合がある。

サーボ機構においては、このような非線形特性として増幅器の飽和、機械的指導部分の非線形摩擦、歯車のバックラッシュ等が考えられるが、ここではクーロン摩擦のあるリレーサーボ機構における振動現象、特に自励振動の角周波数および出力波形、強制振動入力を印加した場合の基本調波振動の発生領域、および出力波形等を正確に解析し、これらがクーロン摩擦の存在によつて受ける影響をあきらかにするとともに、あわせてこれらの周期振動の安定性について論じた。さらに自励振動の場合について、その角周波数およびリレー出力に対する出力速度の位相差を系の線形部の伝達関数とパラメータとから図式的に求める方法についても考察した。

### 2. 自励振動

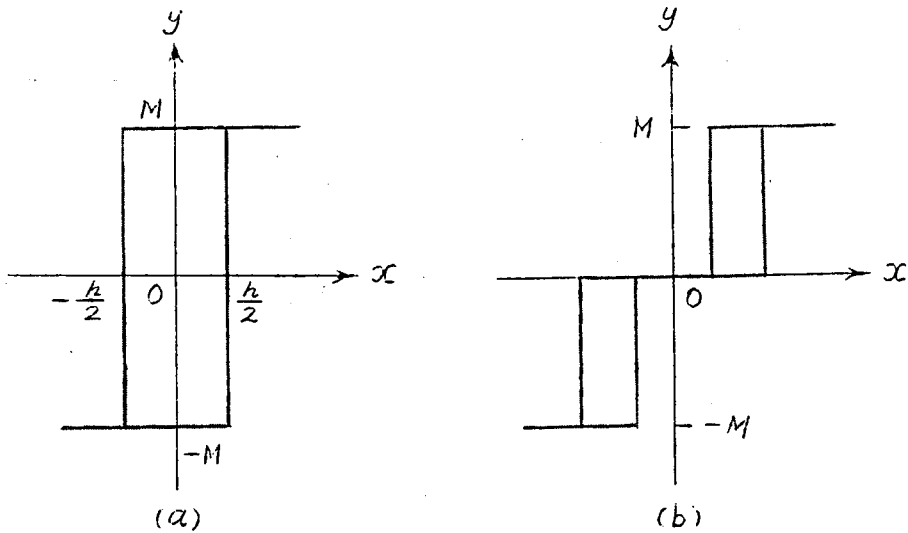
リレーサーボ機構に発生する自励振動については、すでに種々検討されているが、クーロン摩擦のある簡単なリレーサーボ機構においても、リレー特性にヒステリシスのある場合には自励振動を発生することがある。いま第2.1図に示すような、クーロン摩擦のあるリレーサーボ機構



第2.1図 クーロン摩擦のあるリレーサーボ機構の構成図

に発生する自励振動について考察する。ただし、 $R(s)$ ,  $X(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $\theta'(s)$ ,  $\theta(s)$  はそれぞれ  $r(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\theta'(t)$ ,  $\theta(t)$  のラプラス変換をあらわすものとする。

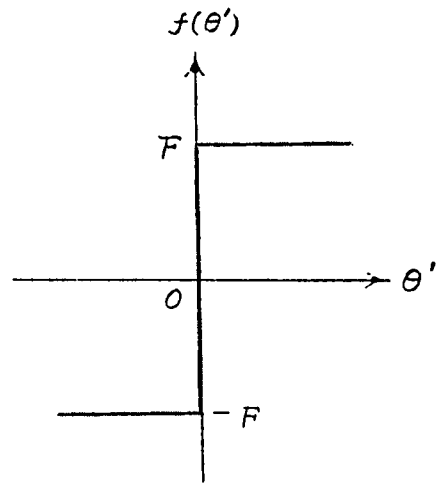
この図で  $N_1$  は第2.2図(a)に示すようなリレー特性を表わし、その



第2.2図 リレー特性

出力トルクの大きさを  $\pm M$ , ヒステリシスの幅を  $h$  とする。また  $N_2$  は第2.3図に示すようなクーロン摩擦トルク特性を表わすものとする。ここで  $f(\theta')$  はクーロン摩擦トルクをあらわす。なお、この場合の静止摩擦トルク  $F$  がリレー要素の出力トルク  $M$  より大きいときには、この

サーボ機構は常に停止して動くこと  
はないので、以下では  $F < M$  であ  
るものとする。このようにすると、  
リレー特性に不感帯のない場合には  
制御対象への入力トルクが零になる  
ことはないで、このサーボ機構の  
出力に停滯現象を生ずることはない。  
これに対しリレー特性が第2.2図(b)  
に示すような一般的な特性の場合に  
は、リレー特性に不感帯があるため  
にサーボ機構の出力に停滯現象を生  
じ、出力波形を正確に求めることは  
非常に困難である。ここではリレー特性が第2.2図(a)で示される場合  
について論じることとする。



第2.3図 クーロン摩擦特性

さて、第2.1図に示すリレーサーボ機構において角周波数  $\omega_0$  なる自  
励振動を発生しているものとし、その定常状態においてリレーの出力が  
負から正に切りかわる時点を時間の原点にとれば、このときの制御系の  
諸量は第2.4図に示すように変化する。リレーの切りかえは自励振動の  
角周波数を  $\omega_0$  とすれば、半周期  $T = \pi/\omega_0$ 。毎に起らなければなら  
ないから、リレーへの入力  $x(t)$  については

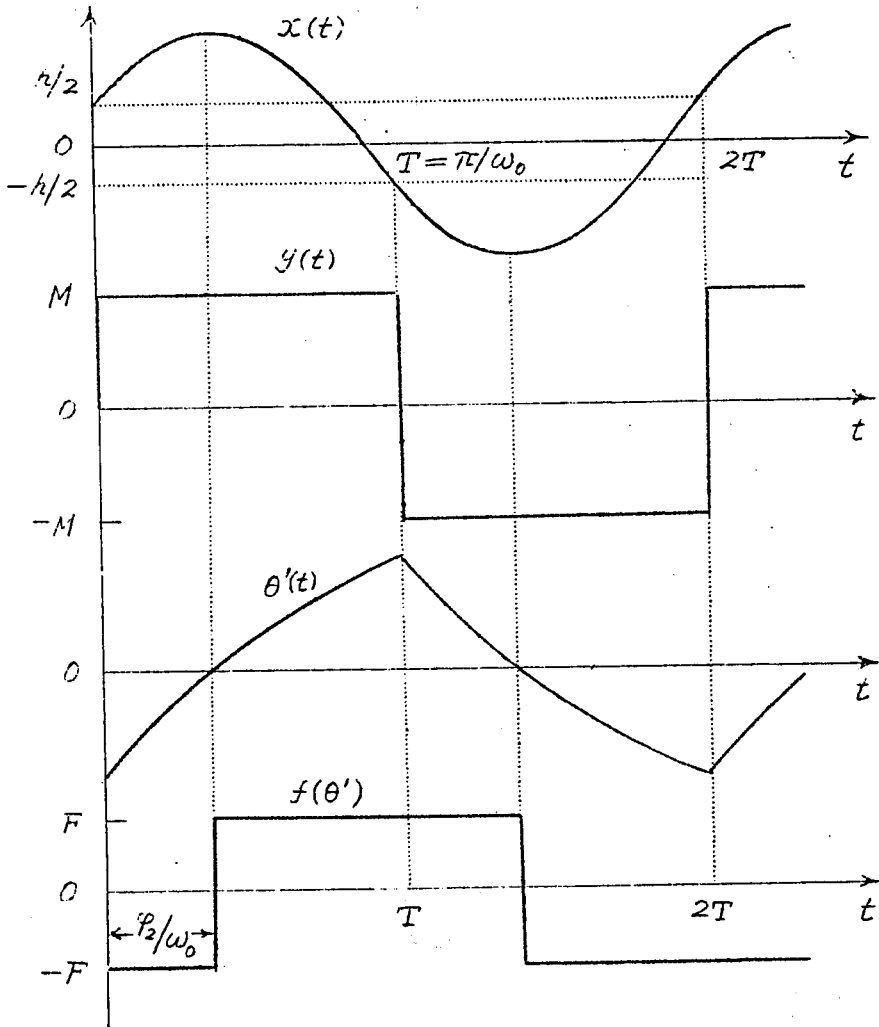
$$\left. \begin{aligned} x(0) &= k/2 \\ x(\pi/\omega_0) &= -k/2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

である。また、リレーの切りかえ時点においては

$$\left. \begin{aligned} x'(0) &> 0 \\ x'(\pi/\omega_0) &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

でなければならない。ただし  $x'(t)$  は  $x(t)$  の時間  $t$  についての導関  
数である。なお一周期  $2T$  の間で  $t=0, \pi/\omega_0, 2\pi/\omega_0$  以外の時点  
ではリレーの切りかえは起らないから





第 2-4 図 自励振動を発生している場合の制御系諸量の時間的变化

$$x(t) > -h/2, \quad (0 < t < \pi/\omega_0) \quad (2.3)$$

である。これらの条件からこのリレーサーボ機構に発生する自励振動の角周波数  $\omega_0$  および出力  $\theta(t)$  と出力速度  $\theta'(t)$  の波形を求めることができる。

さて、リレーの出力  $y(t)$  は  $T = \pi/\omega_0$  を半周期とする周期的に変化する方形波列となる。この  $y(t)$  をラプラス変換すれば定常状態において

$$Y(s) = \frac{M}{s} \frac{1 - \exp(-sT)}{1 + \exp(-sT)} \quad (2.4)$$

となる。また出力に停滯を生じない場合には、第2.4図に示したようにクーロン摩擦トルク  $f(\theta')$  の波形も  $T$  を半周期として、周期的に変化する方形波列となる。そこで  $f(\theta')$  の波形が  $y(t)$  に対して生ずる位相差を  $\varphi_2$  とすると、 $f(\theta')$  のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{f(\theta')\} = \frac{F}{s} \frac{1 - \exp(-sT)}{1 + \exp(-sT)} \exp\left(-\frac{s\varphi_2}{\omega_0}\right) \quad (2.5)$$

となる。

第2.1図からあきらかなように

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = G(s) [Y(s) - \mathcal{L}\{f(\theta')\}] , \quad (2.6)$$

ただし  $G(s) = K/s (1 + T_1 s)$

であるから、これに (2.4), (2.5) 両式を代入し、逆ラプラス変換によって定常状態におけるこのリレーサーボ機構の出力  $\theta(t)$  を求めると、

(i)  $0 \leq t \leq \varphi_2/\omega_0$  においては

$$\begin{aligned} \frac{\theta(t)}{KM} = & \left(t - \frac{T}{2}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right\} \\ & + \frac{F}{M} \left[ \left(t + \frac{T}{2} - \frac{\varphi_2}{\omega_0}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t + T - \varphi_2/\omega_0}{T_1}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

(ii)  $\varphi_2/\omega_0 \leq t \leq T$  においては

$$\begin{aligned} \frac{\theta(t)}{KM} = & \left(t - \frac{T}{2}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right\} \\ & - \frac{F}{M} \left[ \left(t - \frac{T}{2} - \frac{\varphi_2}{\omega_0}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t - \varphi_2/\omega_0}{T_1}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。なお、出力速度  $\theta'(t)$  は (2.7), (2.8) 両式を時間  $t$  について微分して

$$\frac{\theta'(t)}{KM} = \left(1 + \frac{F}{M}\right) - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \left\{ 1 + \frac{F}{M} \exp\left(-\frac{T - \varphi_2/\omega_0}{T_1}\right) \right\} \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} & (0 \leq t \leq \varphi_2/\omega_0) \\ & = \left(1 - \frac{F}{M}\right) - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \left\{1 - \frac{F}{M} \exp\left(\frac{\varphi_2}{\omega_0 T_1}\right)\right\} \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \\ & \quad \left(\frac{\varphi_2}{\omega_0} \leq t \leq T\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

となる。

一方  $f(\theta')$  の波形の正負の極性が反転する時点は

$$\theta'(t) = 0$$

となる点である。したがって

$$\theta'(\varphi_2/\omega_0) = 0 \quad (2.10)$$

なる関係式が成立する。そこで (2.9) および (2.10) 式より

$$\frac{\varphi_2}{\omega_0} = T_1 \log \frac{1 + \tanh \frac{T}{2T_1}}{1 + \frac{F}{M} \tanh \frac{T}{2T_1}} \quad (2.11)$$

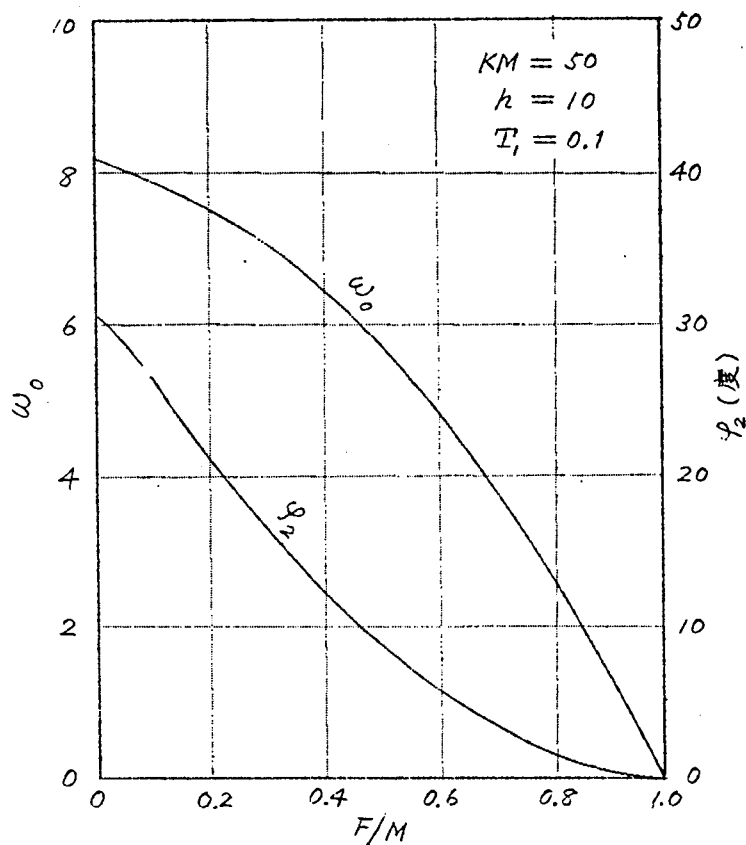
を得る。また (2.1) 式より

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\theta\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\frac{h}{2} \quad (2.12)$$

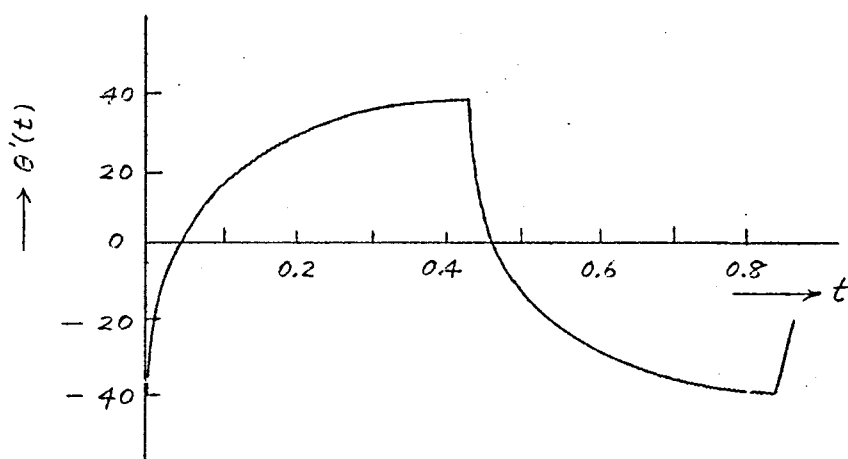
であるから、これと  $T = \pi/\omega_0$  なる関係を用いて (2.8), (2.11) 両式から自励振動の角周波数  $\omega_0$  および  $f(\theta')$  が  $y(t)$  に対して生ずる位相差  $\varphi_2$  を求めることができる。

第2.5図は1例として  $KM=50$ ,  $h=10$ ,  $T_1=0.1$  として  $\omega_0$  と  $\varphi_2$  の値を求め、これらが  $F/M$  の値によって変化する模様を示したものである。この図から明らかなように、リレー出力に対してクーロン摩擦トルクが零から次第に大きくなるにつれて自励振動の角周波  $\omega_0$  は減少し、その変化の割合はクーロン摩擦トルクが小さいところでは比較的小さく、クーロン摩擦トルクが大きくなるほど大きくなる。また位相差  $\varphi_2$  もクーロン摩擦トルクの増加と共に減少し、その変化の割合はクーロン摩擦トルクが小さいほど大きい。

なお、上のようにして自励振動の角周波数  $\omega_0$  および位相差  $\varphi_2$  が求まれば (2.7), (2.8) 又は (2.9) 式から  $t=0 \sim T$  での自励振動の出力



第2.5図 自励振動の角周波数と位相差



第2.6図 自励振動の出力波形  
 ( $KM=50$ ,  $h=10$ ,  $T_1=0.1$ ,  $F/M=0.2$ )

波形を求めることができる。さらに  $t = T \sim 2T$  での出力波形は  $t = 0 \sim T$  での波形の正負の符号が逆になったものである。第 2.6 図は  $KM = 50$ ,  $h = 10$ ,  $T_f = 0.1$ ,  $F/M = 0.2$  として自励振動の出力波形の 1 例を示したものである。

### 3. 強制振動

#### 3.1. 基本式

つぎに第 2.1 図に示したようなリレーサーボ機構に

$$r(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (2.13)$$

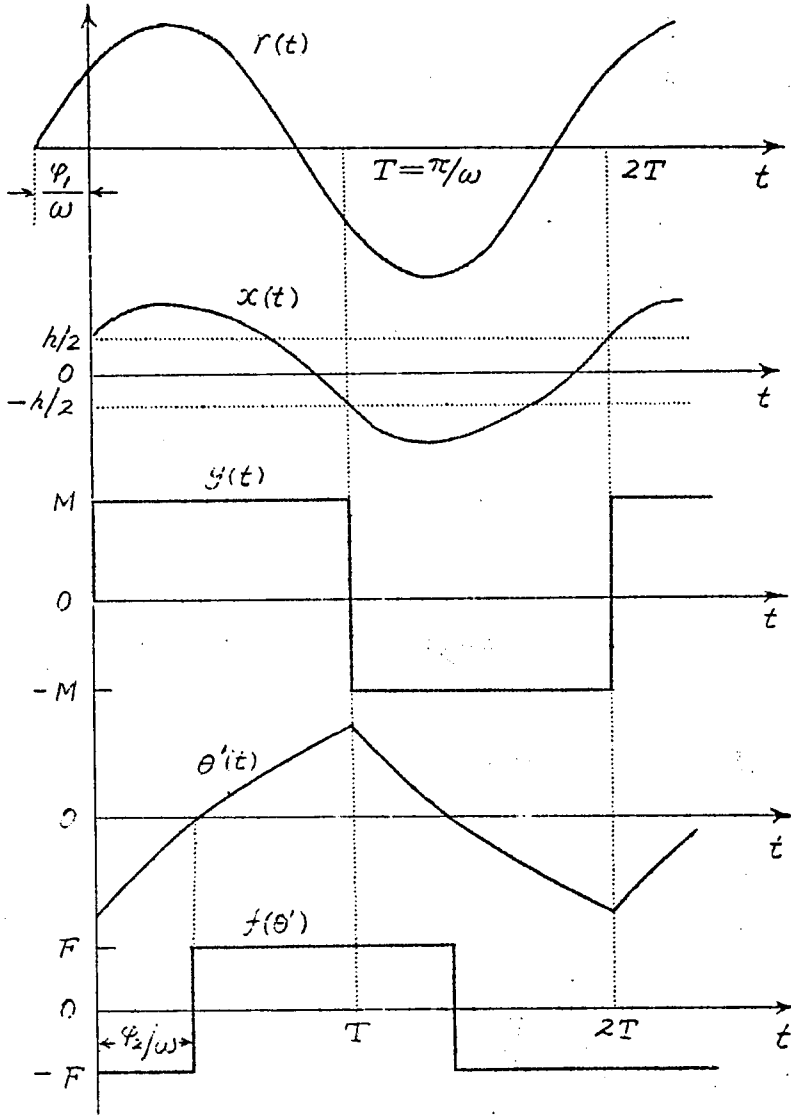
なる入力信号を加えた場合の強制振動について考察する。この場合には入力信号と同一角周波数の同期振動（基本調波振動）を発生するのが普通であるが、入力角周波数  $\omega$  とサーボ機構のパラメータの如何によつてはこの種の基本調波振動を発生せず、高調波振動、分数調波振動<sup>(iii)</sup>、あるいは概周期振動を発生する場合がある。ここではこのような複雑な場合は除外して、クーロン摩擦のあるリレーサーボ機構において、強制振動入力によつて生ずる基本調波振動についてのみ考察する。なお (2.13) 式で入力信号の位相角  $\varphi_1$  は、系の出力が基本調波振動を発生している定常状態において、リレー出力が負から正に切りかわる時点を時間の原点にとつたときの入力信号の位相を与えるものである。したがって定常状態におけるこのリレーサーボ機構の諸量の変化は第 2.7 図に示すようになる。

さてこの場合、リレーへの入力  $x(t)$  は

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1) - \theta(t) \quad (2.14)$$

である。したがって基本調波振動を発生するためのリレーの切りかえ時点において満足すべき条件は、

$$\left. \begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= A \sin(\pi + \varphi_1) - \theta\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{h}{2} \\ x'\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= A \omega \cos(\pi + \varphi_1) - \theta'\left(\frac{\pi}{\omega}\right) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$



第2.7図 強制振動時の制御系諸量の時間的变化

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1) - \theta(t) > -\frac{h}{2}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \quad \Bigg]$$

で与えられる。そこでこれらの条件を満足する入力信号の振幅  $A$  と位相角  $\varphi_1$  が存在すれば、このリレーサーボ機構には入力信号と同一の角周波数  $\omega$  を持つ基本調波振動が発生することになる。この場合リレー出

力  $y(t)$  とクーロン摩擦トルク  $f(\theta')$  の波形は、定常状態においていづれも  $T = \pi/\omega$  を半周期として周期的に変化する方形波列となるので、このとき出力波形  $\theta(t)$  は自励振動の場合に示したものと全く同様に

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = G(s) \left[ Y(s) - \mathcal{L}\{f(\theta')\} \right]$$

なる関係を用いて求めることができ、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta(t)}{KM} &= \left(t - \frac{T}{2}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right\} \\ &+ \frac{F}{M} \left[ \left(t + \frac{T}{2} - \frac{\varphi_2}{\omega}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t + T - \varphi_2/\omega}{T_1}\right) \right\} \right], \\ &\quad (0 \leq t \leq \varphi_2/\omega) \\ \frac{\theta(t)}{KM} &= \left(t - \frac{T}{2}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right\} \\ &- \frac{F}{M} \left[ \left(t - \frac{T}{2} - \frac{\varphi_2}{\omega}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t - \varphi_2/\omega}{T_1}\right) \right\} \right] \\ &\quad (\varphi_2/\omega \leq t \leq T) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

となる。また出力速度  $\theta'(t)$  は  $\theta(t)$  を時間  $t$  について微分して得られることも自励振動の場合と同様である。なお  $\varphi_2/\omega$  はクーロン摩擦トルク  $f(\theta')$  の極性が反転する時点で、この点では

$$\theta'(\varphi_2/\omega) = 0 \quad (2.17)$$

となる。したがって (2.15), (2.16) 両式から

$$\frac{\varphi_2}{\omega} = T_1 \log \frac{1 + \tanh \frac{T}{2T_1}}{1 + \frac{F}{M} \tanh \frac{T}{2T_1}} \quad (2.18)$$

となり、これから  $F/M$  をパラメータとして  $f(\theta')$  が  $y(t)$  に対して生ずる位相差  $\varphi_2$  を求めることができる。

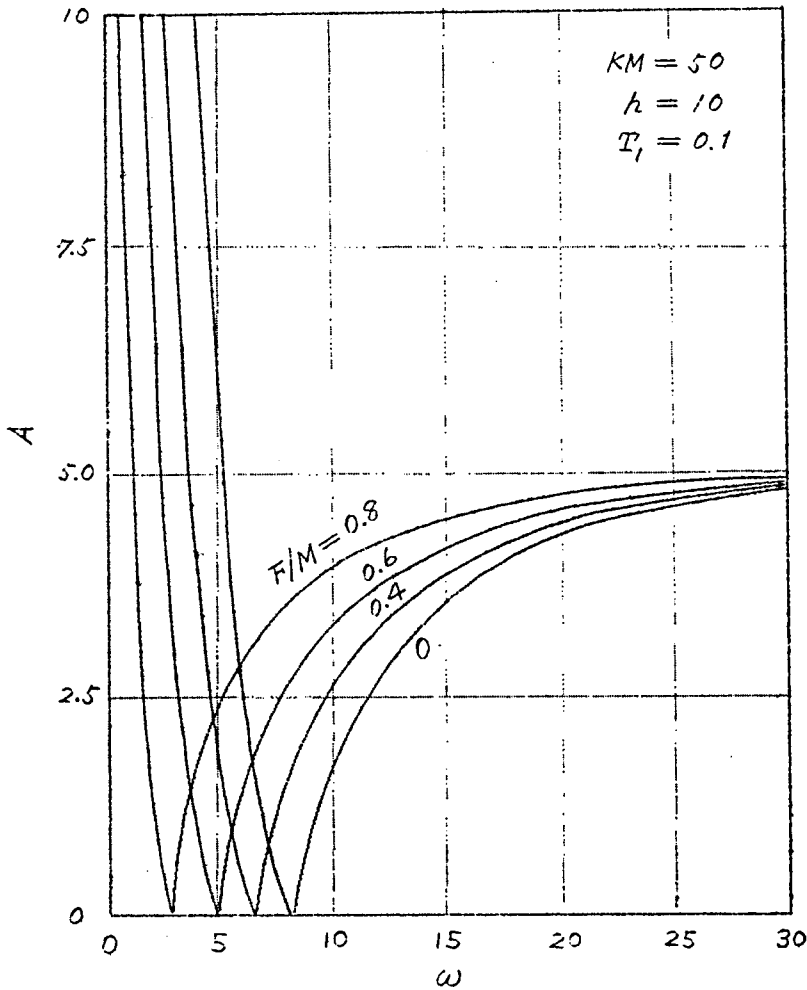
### 3.2. 基本調波振動の発生限界

つぎに基本調波振動を発生するための条件である (2.15) 式の第1式は、(2.16) 式の第2式を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{A}{KM} \sin \varphi_1 + \frac{F}{M} \frac{\varphi_2}{\omega} + \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left(\frac{T}{2} - T_1\right) + T_1 \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \\ & \times \left\{1 - \frac{F}{M} \exp\left(\frac{\varphi_2}{\omega T_1}\right)\right\} \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) = \frac{h}{2KM} \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。そこで(2.19)式から

$$\begin{aligned} \frac{A}{KM} \geq & \left| \frac{F}{M} \frac{\varphi_2}{\omega} + \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left(\frac{T}{2} - T_1\right) + T_1 \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \left\{1 - \frac{F}{M} \exp\left(\frac{\varphi_2}{\omega T_1}\right)\right\} \right. \\ & \left. \times \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) - \frac{h}{2KM} \right| \end{aligned} \quad (2.20)$$

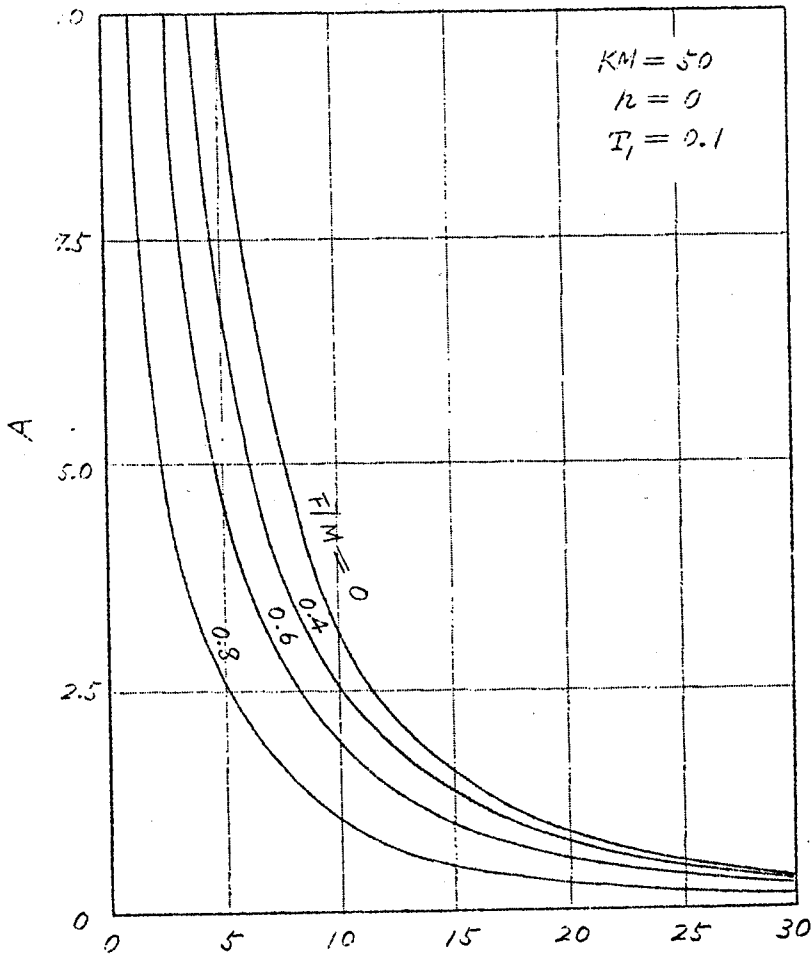


第2.8図 基本調波振動の発生領域(1)



が成立するときに限り、(2.19)式から  $\varphi_1$  を決定することができる。したがって(2.20)式が基本調波振動が発生するための1つの条件を与えることになる。なお、入力信号がこの条件を満足する場合の基本調波振動は(2.15)式の第2、第3式の条件を満足している。

(2.20)式の関係をも  $h=10$  とし、 $F/M$  をパラメータとして示した一例が第2.8図であつて、入力信号の振幅  $A$  の値がこれらの曲線の与える値より大きいとき、入力信号と同一角周波数の基本調波振動を発生することになる。この基本調波振動の発生領域内で  $A=0$  となる角周波数は、



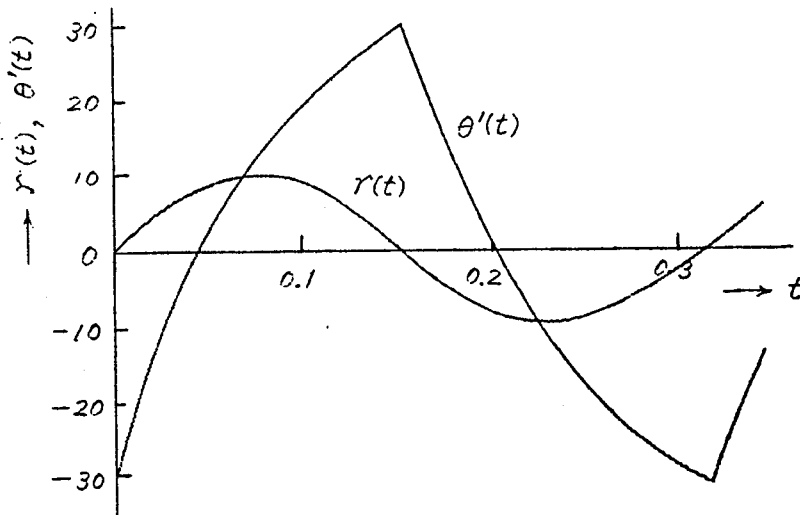
第2.9図 基本調波振動の発生領域(2)

前節に求めたこのリレーサーボ機構の自励振動の角周波数  $\omega_0$  を与える、また  $k=0$  なるヒステリシスのない理想的なリレー特性の場合についても同様に論ずることができ、この場合の基本調波振動を発生する領域の1例を示せば第2.9図のようになり、これらの曲線より上の領域で基本調波振動を発生する。なお第2.8図、2.9図において各曲線より下の領域に対する入力信号に対しては入力と同一周波数の出力を発生せず、概周期振動あるいは分数調波振動を発生する。すなわち、この領域ではこのリレーサーボ機構は入力信号に追従しないことになる。

### 3.3. 出力速度波形

つぎに上のようにして(2.19)式から  $\varphi_1$ 、(2.18)式から  $\varphi_2$  が求まれば、(2.16)式を用いて基本調波振動を発生している場合の、入力信号に対するこのリレーサーボ機構の出力波形および出力速度波形を正確に求めることができる。出力速度波形は

$$\frac{\theta'(t)}{KM} = \left( 1 + \frac{F}{M} \right) - \left( 1 + \tanh \frac{T}{2T_1} \right) \left( 1 + \frac{F}{M} e^{-\frac{T-\varphi_2/\omega}{T_1}} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \quad \left( 0 \leq t \leq \varphi_2/\omega \right)$$



第2.10図 強制入力に対する出力速度波形  
( $KM=50$ ,  $T_1=0.1$ ,  $F/M=0.1$ ,  $A=10$ ,  $\omega=20$ )

$$= \left(1 - \frac{F}{M}\right) - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \left(1 - \frac{F}{M} e^{\frac{\varphi_2}{\omega T_1}}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \quad \left. \vphantom{\frac{F}{M}} \right\} \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{\varphi_2}{\omega} \leq t \leq T\right)$$

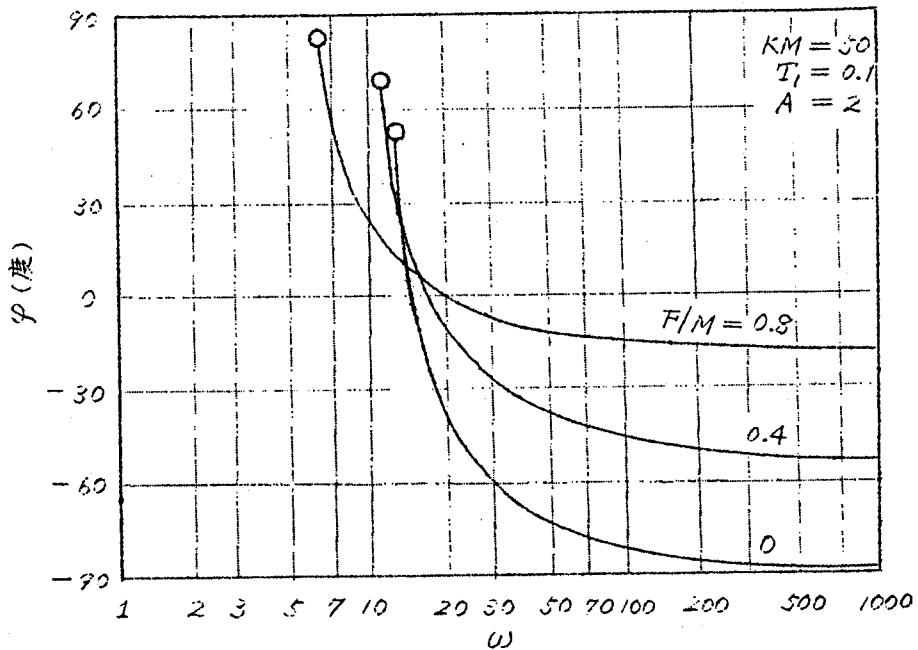
で与えられる。一例として  $KM=50$ ,  $T_1=0.1$ ,  $\omega=20$ ,  $A=10$  とし,  $F/M=0.1$  として計算した結果を示せば第2.10図を得る。

### 3.4. 位相特性

つぎに強制入力に対する出力速度の位相特性について考察する。第2.7図からも明らかなように強制入力に対する出力速度の位相差を  $\varphi$  とすると,  $\varphi$  は

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (2.22)$$

で与えられる。(2.19)式から  $\varphi_1$  を, (2.18)式から  $\varphi_2$  を求めて  $k=0$  なるリレーにヒステリシスのない場合の  $\varphi$  の値の一例を示せば第2.11図に示すようになる。



第2.11図 リレーヒステリシスのない場合の位相特性

入力信号の角周波数が丸印で示した点の角周波数よりも小さい場合には基本調波振動を発生しない。これらの点は第2.9図に示した基本調波振動の発生領域の境界上にある。また角周波数が大きくなるにつれて $\varphi$ の値はクーロン摩擦トルクとリレーの出力トルクとの比  $F/M$  によつて定まる  $-90^\circ$  よりも大きい一定値に收れんし、その値は  $F/M$  の値が大きくなるほど大きくなる。なお、リレー要素およびクーロン摩擦を含まない2階の線形サーボ機構においては、 $\varphi$  の値は角周波数の変化に伴つて  $90^\circ$  から  $-90^\circ$  の間で変化するものであるから、第2.11図よりリレー要素およびクーロン摩擦の存在のために位相特性がいちぢるしく異なることがわかる。

さらに  $\omega \neq 0$  なるリレーにヒステリシスのある場合にも第2.11図と同様の曲線が得られるが、第2.8図からもあきらかなように、入力信号の振幅によつては、ある角周波数の範囲でのみ  $\varphi$  の曲線が得られ、その両側では基本調波振動を発生しない場合がある。

## 4. 周期振動の安定問題

前節までにクーロン摩擦のあるリレーサーボ機構に発生しうる周期振動（自励振動および強制振動）について、その振動波形、発生領域等について検討し、これがクーロン摩擦によつて受ける影響について考察したが、つぎにはこれらの周期振動の安定性について考察する。なおこの周期振動の安定性は自励振動の場合でも、強制振動の場合でも同様に取扱うことができるので、ここではリレーサーボ機構に強制振動入力を印加した場合の基本調波振動の安定性について考察することにする。

さてクーロン摩擦のあるリレーサーボ機構の周期振動の場合には、Ya. Z. Tsypkin 氏がリレー特性が不感帯をもつリレー制御系の周期振動の安定性を論ずるに当つて用いた方法<sup>(12)</sup>と同様にして論ずることができる。そこで第2.1図に示すようなリレーサーボ機構で、制御系の諸量が第2.7図に示すように  $T = \pi/\omega$  を半周期として周期的に変化してい

る場合に、入力信号  $r(t)$  に加わった微小外乱  $r_d(t)$  にもとづく制御系諸量の微小変化が、この外乱が取除かれた後、時間の経過と共に消滅すればもとの同期振動は安定であることになる。いま微小外乱  $r_d(t)$  にもとづく制御系諸量の微小変化をそれぞれ添字  $d$  を付して表わすことにすれば、第3節の記号を用いて

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} &= \mathcal{L}\{r(t)\} - G(s) [\mathcal{L}\{y(x)\} - \mathcal{L}\{f(\theta')\}] \\ \mathcal{L}\{x(t) + x_d(t)\} &= \mathcal{L}\{r(t) + r_d(t)\} \\ &\quad - G(s) [\mathcal{L}\{y(x + x_d)\} - \mathcal{L}\{f(\theta' + \theta'_d)\}] \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

となる。したがって各変数のラプラス変換を大文字をもって表わし、また階段状関数の導関数を  $\delta$  関数を用いて表示すれば

$$X_d(s) = R_d(s) - G(s) \mathcal{L} \left\{ \frac{dy(x)}{dx} x_d - \frac{df(\theta')}{d\theta'} \theta'_d \right\} \quad (2.24)$$

を得る。ここで

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= 2M\delta(x(t)) \\ \frac{df(\theta')}{d\theta'} &= 2F\delta(\theta'(t)) \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

である。リレーの切りかえ時点を  $t_k$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \delta(x(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(t - t_k)}{|x'(t_k)|} \\ t_k &= k\pi/\omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

(付録2. (5)式. 参照)

であるから (2.25) 式の第1式は

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(t - k \frac{\pi}{\omega}\right) \quad (2.27)$$

となる。(付録2. (7)式. 参照) またクーロン摩擦特性については、その極性の反転する時点は

$$t'_k = k\pi/\omega + \varphi_2/\omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

であり, また  $\theta''(t)$  は  $t = \varphi_2/\omega$  で不連続な値をとることに注意して

$$\left. \begin{aligned} \frac{df'(\theta)}{d\theta'} &= \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \\ \theta_0''(\varphi_2/\omega) &= \frac{\theta''(\frac{\varphi_2}{\omega} + 0) \cdot \theta''(\frac{\varphi_2}{\omega} - 0)}{\theta''(\frac{\varphi_2}{\omega} + 0) + \theta''(\frac{\varphi_2}{\omega} - 0)} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

ただし

を得る。(付録2.(11)式参照) そこで(2.27), (2.28)両式を(2.24)式に代入し, これに $\delta$ 関数の積分の定理<sup>\*</sup>を適用すると

$$\begin{aligned} X_d(s) &= R_d(s) - \frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} G(s) \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) x_d\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) \\ &+ \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} G(s) \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-s\left(k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}\right)\right\} \theta_d'\left(k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} X_d^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) x_d\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) \\ \oplus_d'^*(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) \theta_d'\left(k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

とおけば, これらは  $x_d(t)$  および  $\theta_d'(t)$  を  $\pi/\omega$  の周期で, インパルス変調したもののラプラス変換である。そこで(2.29)式は

$$\begin{aligned} X_d(s) &= R_d(s) - G(s) \left[ \frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} X_d^*(s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} \exp\left(-s \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \oplus_d'^*(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。一方, 第2.1図から明らかなように

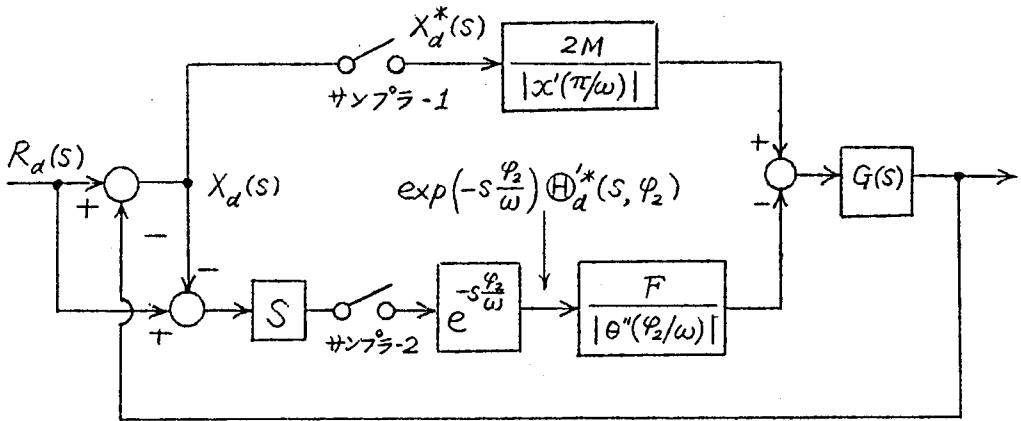
$$R_d(s) - X_d(s) = \frac{1}{s} \oplus_d'(s) \quad (2.32)$$

なる関係があるから, これを用いて

\*  $\mathcal{L}\{\delta(t-t_k)f(t)\} = \exp(-st_k)f(t_k)$ , くわしくは文献(13)参照。

$$\Theta_d'^*(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) = \left[ s R_d(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right]^* - \left[ s X_d(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right]^* \quad (2.33)$$

を得る。したがってこの場合の周期振動の安定性は、(2.31), (2.32) 両式からわかるように、第2.12図に示す線形サンプル値制御系の安定問題として考えることができる。なお、ここで二つのサンプラは同一周期で動作するとする。



第2.12図 (2.31)式に対応するサンプル値制御系

さてパルス伝達関数について

$$\left. \begin{aligned} X_d^*(s) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_d(s + 2jn\omega) \\ \left[ s X_d(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right]^* &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{ (s + 2jn\omega) \frac{\varphi_2}{\omega} \right\} (s + 2jn\omega) X_d(s + 2jn\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

なる表示を用いれば、これと(2.31), (2.32) 両式を用い、さらに  $X_d^*(s)$  および  $\left[ s X_d(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right]^*$  の周期性を考慮して

$$\begin{aligned} X_d^*(s) &= R_d^*(s) - \frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} G^*(s) X_d^*(s) \\ &\quad + \frac{F}{|\theta''(\varphi_2/\omega)|} G^*(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}) \left\{ \left[ s R_d(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right]^* - \left[ s X_d(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right]^* \right\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

および

$$\begin{aligned} \left[ SX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* &= \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* - \frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} \left[ SG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* X_d^*(s) \\ &+ \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} \left[ SG(s) \right]^* \left\{ \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* - \left[ SX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

を得る。ただし

$$\left. \begin{aligned} G^*\left(s, \pm \frac{\varphi_2}{\omega}\right) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pm\left(s+2jn\omega\right)\frac{\varphi_2}{\omega}\right\} G(s+2jn\omega) \\ \left[ SG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\left(s+2jn\omega\right)\frac{\varphi_2}{\omega}\right\} (s+2jn\omega) G(s+2jn\omega) \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

である。(2.35)および(2.36)式から

$$\begin{aligned} X_d^*(s) &= \frac{1}{\psi^*(s)} \left[ \left\{ 1 + \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} \left[ SG(s) \right]^* \right\} R_1^*(s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) R_2^*(s) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \left[ SX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* &= \frac{1}{\psi^*(s)} \left[ -\frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} \left[ SG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* R_1^*(s) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 1 + \frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} G^*(s) \right\} R_2^*(s) \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

を得る。ここで

$$\left. \begin{aligned} R_1^*(s) &= R_d^*(s) + \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \\ R_2^*(s) &= \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* + \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} \left[ SG(s) \right]^* \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

である。また  $\psi^*(s)$  は次式で与えられる。

$$\psi^*(s) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} G^*(s) & \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) \\ \frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} \left[ SG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* & 1 + \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} \left[ SG(s) \right]^* \end{vmatrix} \quad (2.41)$$

そこで



$$\psi^*(s) = 0 \quad (2.42)$$

なる方程式のすべての根の実数部が負であれば、第2.12図に示す線形サンプル値制御系は安定であり、したがってこのリレーサーボ機構の周期振動は安定であることになる。(2.41)式における  $G(s)$  についての各種のパルス伝達関数を求めて(2.42)式の根を検討すれば、このリレーサーボ機構の自励振動および強制振動の安定性を判別することができる。

つぎに(2.41)式を用いて具体的にこの系の安定判別を解析してみる。(2.41)式にみられるように、 $\psi^*(s)$  は  $G(s)$  についての各種のパルス伝達関数を含んでいる。そこでいまこれらの関数の表示式を考察する。

いま、 $g(t)$  のラプラス変換を  $G(s)$  とすると、フーリエ変換の公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) f\left(k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}\right) = \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{(s+2jn\omega) \frac{\varphi_2}{\omega}\right\} F(s+2jn\omega) \quad (2.43)$$

がなりたつ。そこで  $G(s)$  のインテリシアル応答を  $h(t)$  とすれば、 $G(s)$  のラプラス逆変換は  $h(0)=0$  ならば  $h'(t)$  であることを考慮して(2.37)、(2.43)両式より

$$G^*\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) h'\left(k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \quad (2.44)$$

$$G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) h'\left(k \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \quad (2.45)$$

を得る。

いま  $G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$  とし  $P(s)$  は  $Q(s)$  の次数より大きくない分数有理関数とする。また  $G(s)$  は単極を有限個もつとすると、

$$h(t) = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{v=1}^n \frac{P(S_v)}{Q'(S_v)S_v} \exp(S_v t) \quad (2.46)$$

ただし、 $S_1, \dots, S_n$  は  $Q(s)=0$  の根とする。  
であらわされる。

(2.46)式を微分して

$$h'(t) = \sum_{v=1}^n C_v \exp(S_v t) \quad (2.47)$$

ただし  $C_v = \frac{P(s_v)}{Q'(s_v)}$

となる。この式で  $t = \frac{\pi}{\omega} \pm \frac{\varphi_2}{\omega}$  とおき (2.44) 式および (2.45) 式に代入し

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-(s-s_v)k \frac{\pi}{\omega}\right\} = \frac{\exp\left(s \frac{\pi}{\omega}\right)}{\exp\left(s \frac{\pi}{\omega}\right) - \exp\left(s_v \frac{\pi}{\omega}\right)}$$

を考慮すれば次式を得る。

$$G^*\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) = \sum_{v=1}^n C_v \frac{d_v \frac{\varphi_2}{\pi} Z}{Z - d_v} \quad (2.48)$$

$$G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) = \sum_{v=1}^n C_v \frac{d_v \frac{1-\varphi_2}{\pi}}{Z - d_v} \quad (2.49)$$

ただし  $Z = \exp\left(s \frac{\pi}{\omega}\right), \quad d_v = \exp\left(s_v \frac{\pi}{\omega}\right)$

また同様にして

$$G^*(s) = \sum_{v=1}^n C_v \frac{Z}{Z - d_v} \quad (2.50)$$

を得る。

また  $[SG(s)]^*$  については  $SG(s) = G_1(s)$  とおけば  $G_1^*(s)$  を求めることになるので、全く上と同様にして計算できる。 $[SG(s, \pm \frac{\varphi_2}{\omega})]^*$  についても  $G_1^*(s, \pm \frac{\varphi_2}{\omega})$  を計算すればよい。

(2.48)~(2.50) 式の公式を使って (2.42) 式の安定条件を検討する。

$G(s) = \frac{1}{S(1+T_1 s)}$  であるから、各種のパルス伝達関数を計算すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} G^*(s) &= \frac{Z(1-d)}{(Z-1)(Z-d)} \\ G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) &= \frac{1}{Z-1} - \frac{db}{Z-d} \\ [SG(s)]^* &= \frac{1}{T_1} \frac{Z}{Z-d} \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

$$\left[ SG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* = \frac{1}{T_1} \frac{Z \cdot b^{-1}}{Z-d}$$

$$\text{ただし } d = \exp\left(-\frac{T_1}{T_1}\right), \quad b = \exp\left(\frac{1}{T_1} \frac{\varphi_2}{\omega}\right)$$

つぎに

$$\frac{2M}{|x'(\pi/\omega)|} = K_1, \quad \frac{F}{|\theta_0''(\varphi_2/\omega)|} = K_2 \quad \text{とおけば}$$

(2.14) および (2.16) 式を使って

$$2MK_1^{-1} = |x'(\pi/\omega)| = |A\omega \cos \varphi_1 + KM \left\{ (1-\alpha) - \frac{2d}{1+d} (1-\alpha b) \right\}| \quad (2.52)$$

$$\text{ただし } \alpha = F/M$$

を得る。また (2.21) 式および (2.28) 式を用いて

$$FK_2^{-1} = |\theta_0''(\varphi_2/\omega)| = \frac{KM}{T_1} \frac{1}{1+d} \frac{(b^{-1}-\alpha)(b^{-1}+\alpha d)}{2b^{-1}+\alpha(d-1)} \quad (2.53)$$

となる。

また  $\theta'(\varphi_2/\omega) = 0$  より (2.21) 式を用いて

$$b = \frac{2}{(1+\alpha)+(1-\alpha)d} \quad (2.54)$$

となる。

(2.51) ~ (2.54) 式を (2.42) 式に代入すると

$$a_0 Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 = 0 \quad (2.55)$$

とかける。(2.55) 式であらわされる方程式の根の実数部が負であるための条件は  $|Z| < 1$  であること、即ち  $Z = \exp\left(s \frac{\pi}{\omega}\right)$  であるので、すべての根が複素平面上の単位円内にあることである。いま、 $Z = \frac{Z_1+1}{Z_1-1}$  とおけば、新変数  $Z_1$  は単位円と複素平面上左側との間に 1 対 1 の対応をなして 1 価的に定まる<sup>(14)</sup> から、この変換された方程式に Hurwitz の判定法を適用できる。すなわち、(2.55) 式からこれを求めると

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &> 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &> 0 \\ a_0(a_2 - a_0) + (a_3 - a_0)a_3 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

となる。

$a_0, a_1, a_2, a_3$  を (2.51) ~ (2.54) 式を使って一般的に表わすことは非常に複雑になるが、数値計算によって (2.56) 式を検討した結果、さきに求めた自励振動ならびに強制振動は安定であることがわかる。

(15)

## 5. 自励振動の図式解法

さきに第2節においてリレーにヒステリシスのある場合、系に発生する自励振動についてその自励振動角周波数  $\omega_0$  およびリレー出力に対する出力速度の位相差  $\varphi_2$  を、クーロン摩擦トルクの大きさ  $F$  とリレー要素の出力トルク  $M$  との比即ち  $F/M$  の関数として求めた。本節ではこれらを系の線形部の伝達関数を複素平面上に描くだけで図式的に求める近似解法について説明する。

### 5.1. 図式解の原理

いまリレー特性が第2.2図(a)であるような第2.1図のサーボ機構において角周波数  $\omega_0$  なる自励振動を発生しているとすると、この場合第2.4図を考慮してリレー要素およびクーロン摩擦のきりかえ条件からつぎの関係が成立しなければならない。

$$\theta(\pi/\omega_0) = h/2, \quad \theta'(\pi/\omega_0) > 0 \quad (2.57)$$

$$\theta'(\varphi_2/\omega_0) = 0, \quad \theta''(\varphi_2/\omega_0) > 0 \quad (2.58)$$

いま  $J_1(\omega_0), J_2(\omega_0)$  なる特性量を導入し次のように定義する。

$$J_1(\omega_0) = -\frac{1}{\omega_0} \theta'\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) - j\theta\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) \quad (2.59)$$

$$J_2(\omega_0) = -\frac{1}{\omega_0^2} \theta''\left(\frac{\varphi_2}{\omega_0}\right) - j\frac{1}{\omega_0} \theta'\left(\frac{\varphi_2}{\omega_0}\right) \quad (2.60)$$

このとき (2.57), (2.58) 両式は

$$I_m J_1(\omega_0) = -h/2, \quad R_e J_1(\omega_0) < 0 \quad (2.61)$$

$$I_m J_2(\omega_0) = 0, \quad R_e J_2(\omega_0) < 0 \quad (2.62)$$

とかくことができる。すなわち(2.61), (2.62)両式を満足する $\omega_0$ と $\varphi_2$ が求むる自励振動の角周波数と位相差を与える。そこでいま $J_1(\omega_0)$ ,  $J_2(\omega_0)$ を複素平面上に描き,  $J_1$  および  $J_2$  に対しそれぞれ(2.61)および(2.62)式を満足する $\omega_0$ と $\varphi_2$ の関係を $\varphi_2$ 平面上に別々に描けば, この $J_1, J_2$ に対する二曲線の交点が求める自励振動状態での $\omega_0$ と $\varphi_2$ の値を与えることになる。

## 5.2 特性量(2.59), (2.60)式の計算

つぎに(2.59)および(2.60)両式であらわされる特性量 $J_1$  および  $J_2$  を系の線形部の伝達関数であらわす方法について述べる。

第2.4図に示されているリレー出力 $y(t)$ , クーロン摩擦トルク $f(\theta') = f(t)$ をフーリエ級数に展開すると,  $n$ を正の奇数として

$$y(t) = \frac{4M}{\pi} \sum_n \frac{\sin n\omega_0 t}{n} \quad (2.63)$$

$$f(t) = \frac{4M}{\pi} \sum_n \frac{\sin n\omega_0(t - \varphi/\omega_0)}{n} \quad (2.64)$$

となる。いま系の線形部の伝達関数を一般に $KG(s)$ とし,  $S = j\omega_0$ とおけば, 一般に

$$\left. \begin{aligned} G(j\omega_0) &= A(\omega_0) \exp[j\varphi(\omega_0)] \\ &= A(\omega_0) \cos \varphi(\omega_0) + jA(\omega_0) \sin \varphi(\omega_0) \\ &= U(\omega_0) + jV(\omega_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

とおくことができる。

しかるに

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = KG(s)\mathcal{L}\{y(t)\} - KG(s)\mathcal{L}\{f(t)\} \quad (2.66)$$

であり, また $y(t)$ ,  $f(t)$ は(2.63), (2.64)式であらわすように, 角周波数が $n\omega_0$ なる正弦波であるから,  $y(t)$ ,  $f(t)$ をラプラス変換することなく $G(s)$ において $S = jn\omega_0$ とおくことによって $\theta(t)$ が求められる。そこで(2.65)式により

$$\theta(t) = \frac{4MK}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} A(n\omega_0) \sin[n\omega_0 t + \Phi(n\omega_0)] - \frac{4FK}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} A(n\omega_0) \sin\left[n\omega_0\left(t - \frac{\varphi_2}{\omega_0}\right) + \Phi(n\omega_0)\right] \quad (2.67)$$

を得る。(2.67)式および(2.65)式の第3式を用いて  $J_1$  および  $J_2$  を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_m J_1(\omega_0) &= \frac{4MK}{\pi} \left\{ \sum_n \frac{1}{n} V(n\omega_0) + \frac{F}{M} \sum_n \frac{1}{n} |G(jn\omega_0)| \sin(n\varphi_2 - \alpha_n) \right\} \\ R_e J_1(\omega_0) &= \frac{4MK}{\pi} \left\{ \sum_n U(n\omega_0) - \frac{F}{M} \sum_n |G(jn\omega_0)| \cos(n\varphi_2 - \alpha_n) \right\} \\ I_m J_2(\omega_0) &= \frac{4MK}{\pi} \left\{ -\sum_n |G(jn\omega_0)| \cos(n\varphi_2 + \alpha_n) + \frac{F}{M} \sum_n U(n\omega_0) \right\} \\ R_e J_2(\omega_0) &= \frac{4MK}{\pi} \left\{ \sum_n n |G(jn\omega_0)| \sin(n\varphi_2 + \alpha_n) - \frac{F}{M} \sum_n n V(n\omega_0) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

ただし

$$\alpha_n = \tan^{-1} \frac{V(n\omega_0)}{U(n\omega_0)}$$

この式を用いて前に述べたようにして  $\omega_0$  と  $\varphi_2$  を決定することができる。特に第1近似として  $n=1$  とすれば

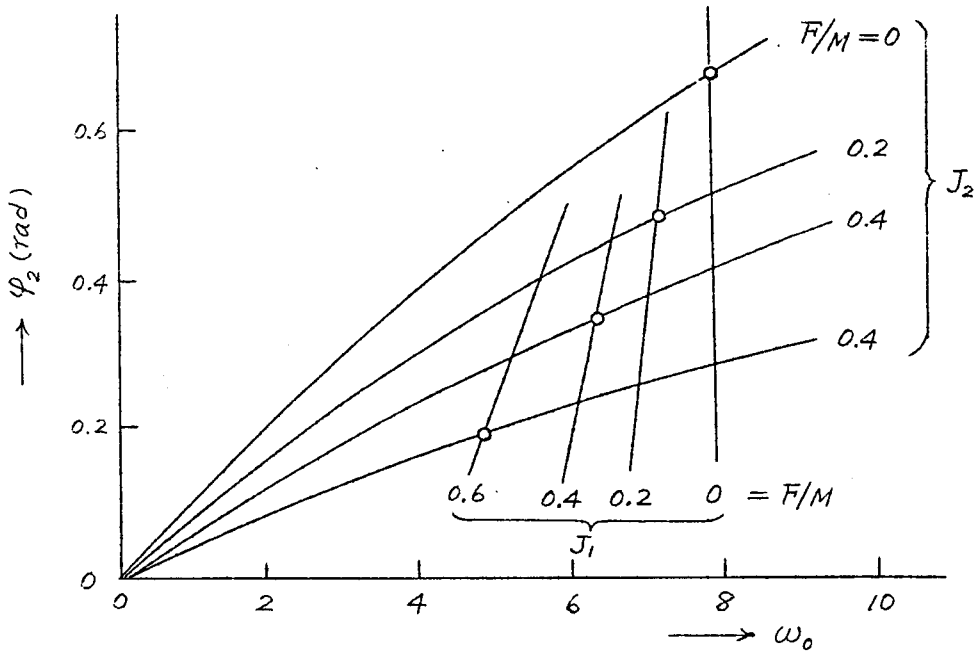
$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega_0) &= \frac{4MK}{\pi} \left\{ G(j\omega_0) - \frac{F}{M} |G(j\omega_0)| \exp[-j(\varphi_2 - \alpha_1)] \right\} \\ j J_2(\omega_0) &= \frac{4MK}{\pi} \left\{ -\frac{F}{M} G(j\omega_0) + |G(j\omega_0)| \exp[j(\varphi_2 + \alpha_1)] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

となり、 $G(j\omega_0)$  を描けば  $F/M$  と  $\varphi_2$  をパラメータとして  $J_1, J_2$  を図式的に容易に求めることができる。

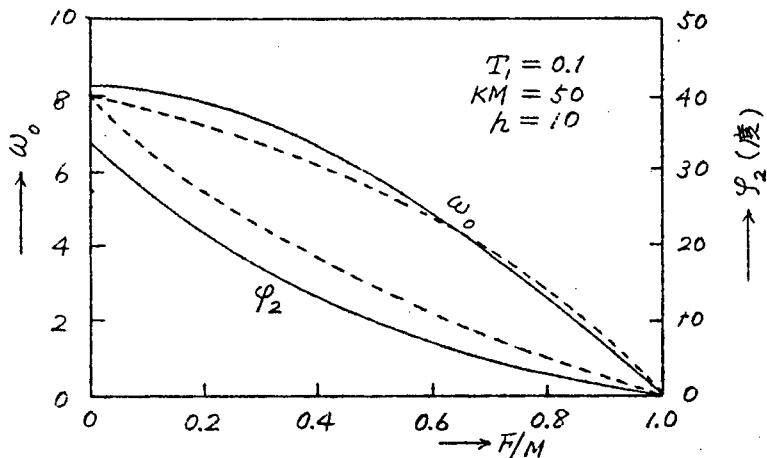
### 5.3. 数値計算例

第2.1図の制御系でリレー特性が第2.2図(a)であるとき、 $T_I = 0.1$ ,  $KM = 50$  としてこの系に発生する自励振動角周波数  $\omega_0$  およびリレーの出力トルクに対する出力速度の位相差  $\varphi_2$  を図式的に求めた結果を第

2・13 図および第2・14 図に示した。ただし計算を簡単にするため  $n=1$  とした。第2・13 図は (2・61), (2・62) 両式を満足する  $J_1$  および  $J_2$  の値を  $F/M$  をパラメータとして  $\omega_0 - \varphi_2$  平面上に描いたもので



第2・13 図 自励振動の図式解



第2・14 図 自励振動角周波数と位相差  
(点線：図式解；実線：正確な計算)

あり、同じ  $F/M$  の値をパラメータにもつ二曲線の交点によって与えられる  $\omega_0$  と  $\varphi_2$  が求むる自励振動角周波数および位相差である。このようにして得た  $\omega_0$ ,  $\varphi_2$  を縦軸に  $F/M$  を横軸にとつて示したものが ~~図2.4.4~~ 図である。この図で点線が図式的に求めたものであり、実線は ~~図2.5.4~~ 図に示したように正確な計算によって求めたものである。

## 6. 結 言

以上クーロン摩擦のある簡単なリレーサーボ機構に発生する自励振動および強制振動入力に対する基本調波振動を、リレー特性が理想的な場合、ヒステリシスのある場合について、周期的定常状態においてはクーロン摩擦トルクがリレー特性のように変化することを利用して解析し、これらの周期振動の正確な波形および発生領域を解析的に求め、これらがクーロン摩擦によって受ける影響について考察した。またこのような周期振動の安定問題を、クーロン摩擦のない場合に Ya. Z. Tyarkin 氏が用いた手法と同様にして或る種の線形サンプル値制御系の安定問題として取扱うことができることを示した。さらに自励振動の場合についてその角周波数およびリレー出力と出力速度の位相差を、系の線形部の伝達関数とパラメータから図式的に求める近似解法について考察し、さきに求めた正確な計算による結果と比較した。



### 第3章 クーロン摩擦とむだ時間を持つサーボ機構の振動現象

#### 1. 緒言

理論的には2次おくれの系であつて不安定になることのないサーボ系においても、実際にゲインをましてゆくと乱調現象を呈し不安定となることはしばしば経験するところである。この乱調現象を説明するために、サーボ系にむだ時間を考慮することは、いままでにも研究がなされており、<sup>(16),(17)</sup> サーボモータの伝達関数を  $e^{-\tau s}/s(1+T_1s)$  とおくことによつてある程度この現象を説明している。この場合のむだ時間は、サーボモータの制御巻線に電圧を印加してより、トルク発生までの時間おくれによると考えられるが、この他真空管増巾器のチヨツパによる時間おくれも含めて、系の電気部分にむだ時間が存在すると考えられる。さらに前章でのべたリレー制御系で、リレーの切りかえにむだ時間が存在する場合、たとえこの系が2次おくれの系でリレーが理想的な特性を有する場合でも、このサーボ系には自励振動が発生する。

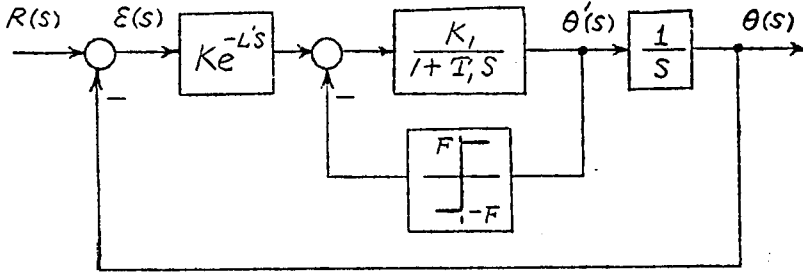
このようにむだ時間の存在は系に自励振動を発生させ、不安定の原因となるが、クーロン摩擦が或る程度存在するとこの摩擦トルクのために、自励振動の発生をおさえ、系を安定化ならしめる。この章ではクーロン摩擦のあるサーボ機構において、系の電気部分にむだ時間を考慮した場合、およびクーロン摩擦のあるサーボ機構をむだ時間があるリレーでリレー制御した場合の振動現象について考察した。

#### 2. サーボ機構の電気部分にむだ時間がある場合<sup>(18)</sup>

##### 2.1. 自励振動の解析

前節にのべたように、サーボモータのトルク発生に存在する時間お

れおよび真空管増幅器のチヨッパによる時間おくれ等を含めてサーボ系の電気部分にむだ時間  $L'$  があると考え、この場合のサーボ機構の構成図を第3.1図に示す。 $F$ はクーロン摩擦トルクの大きさをあらわす。



第3.1図 電気部分にむだ時間のあるサーボ機構の構成図

いま、このサーボ機構に階段状入力が入力された場合には、この系の動作は

$$T_i \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K K_i \varepsilon(t - L') + F K_i \operatorname{sgn} \left( \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right) = 0 \quad (3.1)$$

によってあらわされる。ここで

$$\frac{1}{T_i} = 2\zeta\omega_0, \quad \frac{K K_i}{T_i} = \omega_0^2, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 L' = L \quad (3.2)$$

とおいて無次元化すると(3.1)式は

$$\frac{d^2 \varepsilon(\tau)}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} + \varepsilon(\tau - L) + \frac{F}{K} \operatorname{sgn} \left( \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \right) = 0 \quad (3.3)$$

となる。

いま、出力速度  $\theta'(t)$  を正弦波と仮定し

$$\theta'(t) = a \sin \omega t \quad (3.4)$$

とおけば、クーロン摩擦特性の describing function を  $g(a)$  として

$$g(a) = 4F/\pi a \quad (3.5)$$

を得る。クーロン摩擦特性を  $g(a)$  であらわしてこの系の特性方程式をかくと

$$p^2 + 2\zeta p + e^{-Lp} + \frac{1}{K} g(a) p = 0, \quad p \equiv \frac{d}{d\tau} \quad (3.6)$$

となる。

ここでこの系の自励振動を検討するために  $p=j\omega$  において (3.6) 式に代入し、実数部、虚数部をそれぞれ 0 に等しいとくと

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega L &= \omega^2 \\ \sin \omega L &= (2\zeta + g(a)) \omega \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

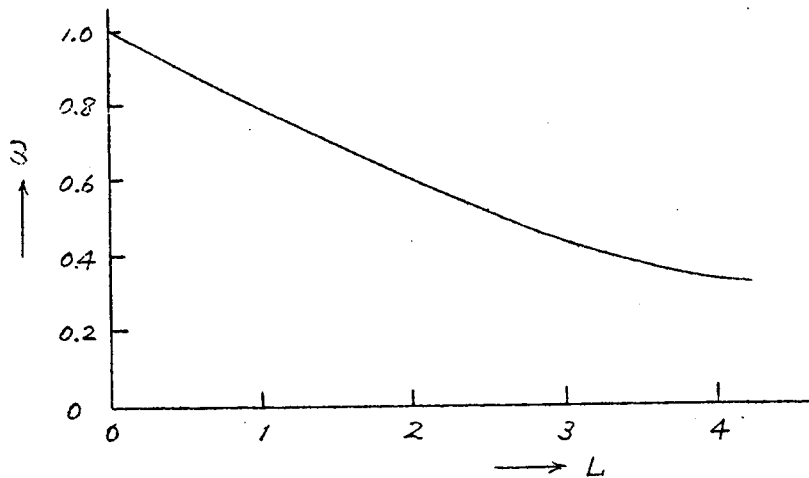
となる。これより

$$\tan \omega L = \sqrt{1 - \omega^2} / \omega^2 \quad (3.8)$$

$$\frac{F}{Ka} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{\omega} - 2\zeta \right) \quad (3.9)$$

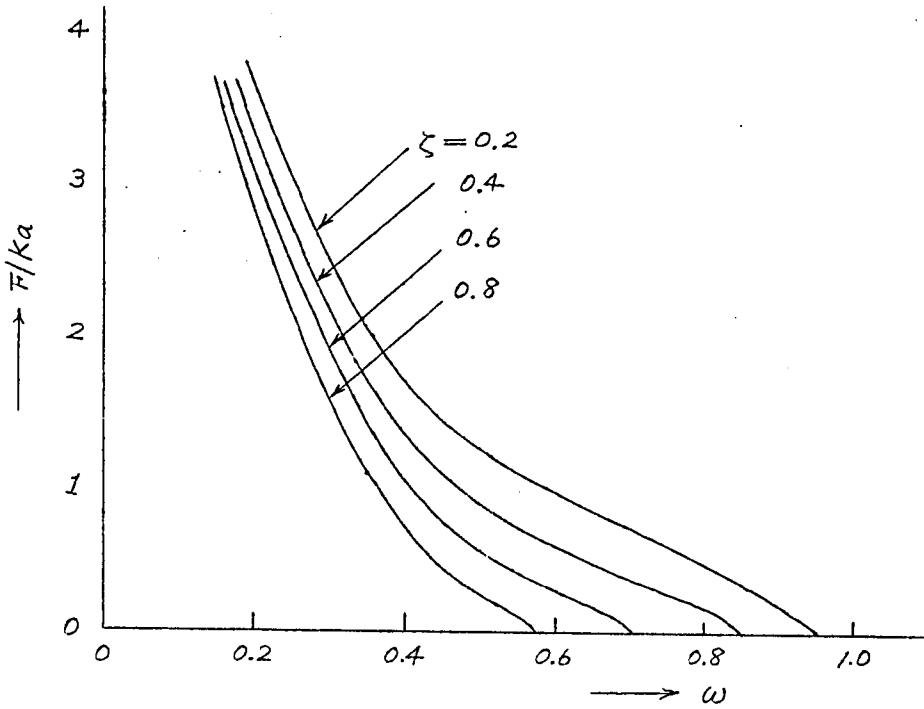
を得る。

(3.8) 式は超越方程式であるが、左辺と右辺を別々にグラフに画きその交点を求めることにより図式的にとくことができる。このようにして  $\omega$  と  $L$  の関係を求めると第 3.2 図のようになり、また (3.9) 式より  $F/Ka$  と  $\omega$  の関係が第 3.3 図のようになる。



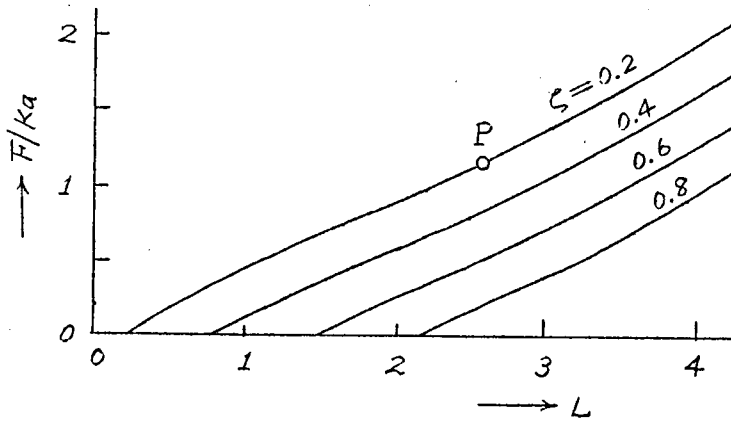
第 3.2 図  $\omega$  と  $L$  の関係

第 3.2 図はむだ時間  $L$  と自励振動の角周波数  $\omega$  の関係をあらわすものであり、第 3.3 図は系の減衰係数  $\zeta$  をパラメータとし、クーロン摩擦と自励振動の振幅の比と自励振動の角周波数の関係を示すものである。



第3.3図  $\omega$  と  $F/Ka$  の関係

第3.2図および第3.3図より  $\omega$  を消去して、 $F/Ka$  と  $L$  の関係を示すと第3.4図のようになる。第3.4図の曲線は(3.8)、(3.9)式を満足



第3.4図  $L$  と  $F/Ka$  の関係

するものであり、この曲線上において自励振動を発生する。つぎに述べる安定判別によりこの自励振動は不安定であることがわかる。また、この曲線より右側すなわち、むだ時間  $L$  の増加する領域では系は不安定であり、右側の領域では安定となる。自励振動の振幅  $a$  は系への階段状入力  $a$  の大きさ、すなわち、

(3.3) 式においては  $\varepsilon(\tau)$  の初期値によって定まるから、いま系への入力の大きさを一定とすると、第3.4図よりクーロン摩擦の大きさ  $F$  の大きいほど系の安定領域がふえることがわかる。たとえば  $\zeta=0.4$  の系においてクーロン摩擦のないときは、 $L > 0.75$  で不安定となったものが、クーロン摩擦の存在のために  $L$  が  $0.75$  以上の値をとつても不安定とならず、安定化されることがわかる。

## 2.2. 安定問題

つぎに前節にのべた自励振動の安定問題について考察する。Michai-loff の安定判別<sup>(19)</sup> によれば、特性方程式において  $p=j\omega$  とおいた実数部を  $X(a, \omega)$ 、虚数部を  $Y(a, \omega)$  とすると

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right) > 0 \quad (3.10)$$

が成立するとき、角周波数  $\omega$ 、振幅  $a$  の自励振動は安定である。

そこでいま (3.6) 式の特性方程式より

$$X(a, \omega) = \cos \omega L - \omega^2$$

$$Y(a, \omega) = 2\zeta\omega - \sin \omega L + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{F}{Ka} \omega$$

であるから、これを (3.10) 式に代入すると

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right) = - (2\omega + L \sin \omega L) \frac{4}{\pi} \cdot \frac{F}{Ka} \cdot \frac{\omega}{a^2} \quad (3.11)$$

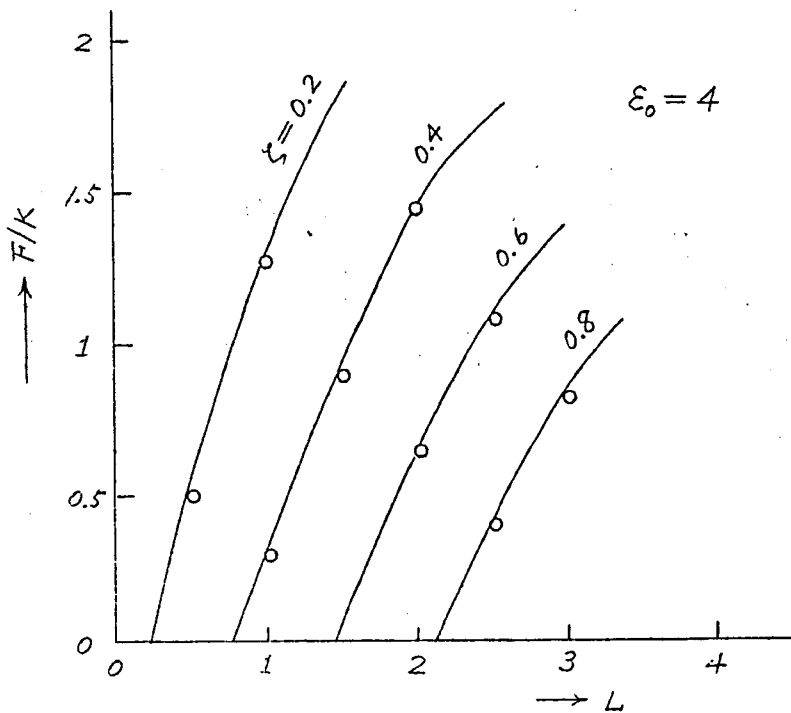
となる。しかるに自励振動の存在条件により

$$\sin \omega L = 2\zeta + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{F}{Ka} > 0$$

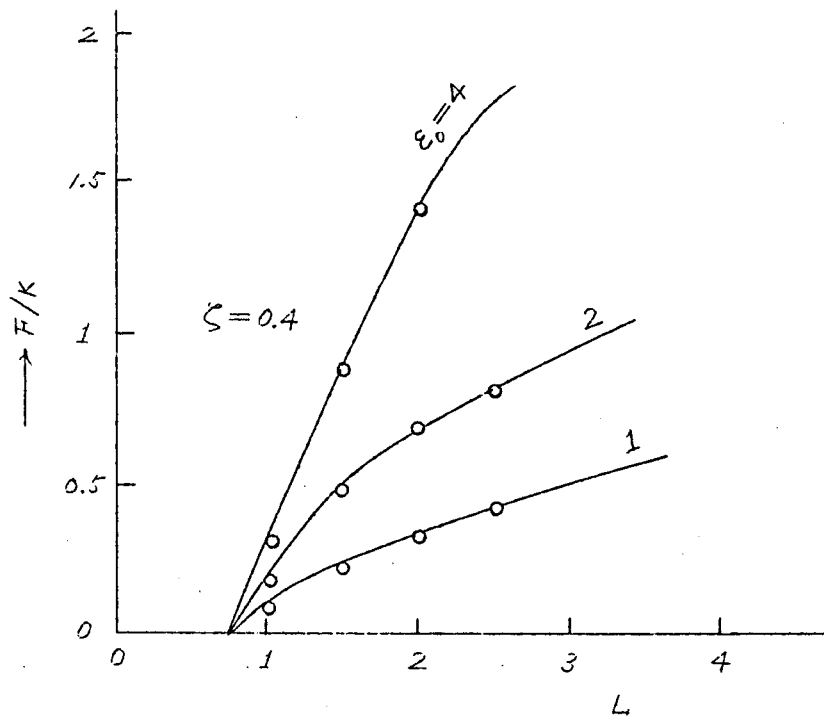
であるから、(3.11) 式の右辺は負となり、自励振動は不安定であることがわかる。すなわちこの場合、安定な自励振動は存在せず系に発生する振動は、時間の経過と共にその振幅が増加する発振状態か、又は時間の経過と共に減衰する安定な振動かのどちらかである。第3.4図からもこの関係が説明される。すなわち、いまある曲線上の1点  $P$  で振幅  $a_0$  の

自励振動をしている状態から何らかの外乱によつて振幅が  $a_0 + \Delta a$  となったとする。このとき  $L$  を一定としておくと  $P$  点は下方に移動し不安定領域に入る。そこで振幅はますます増加し遂に発散してしまう。もし  $P$  点で振幅が減少し  $a_0 - \Delta a$  となったとすると、 $P$  点は上方に移動するが、そこは安定領域であるから振動の振幅は減少してゆく。すなわち第3.4図の曲線は不安定な自励振動をあらわしていることがわかる。

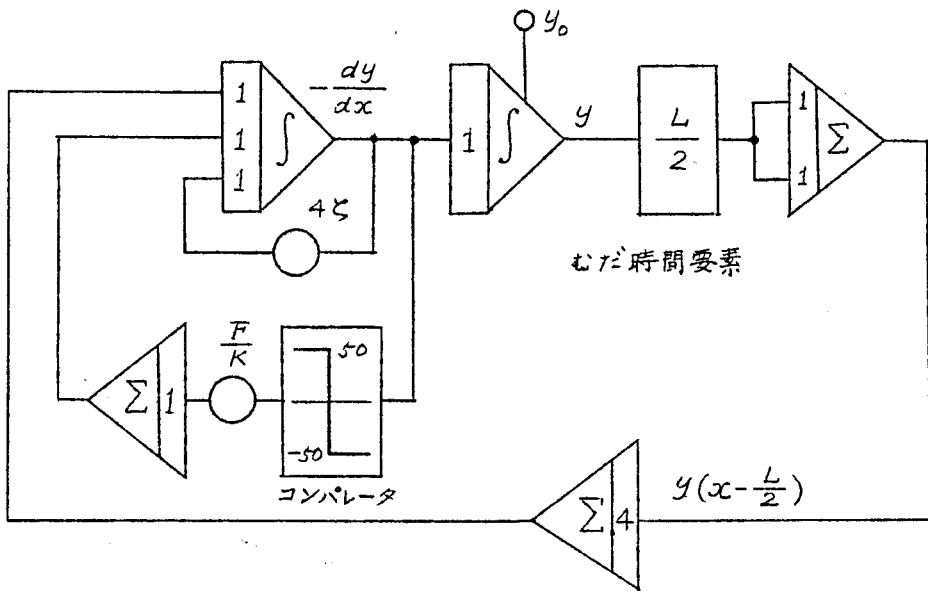
不安定な自励振動はこれをのちに述べる方法で  $\varepsilon - \dot{\varepsilon}$  位相面上にかけば、誤差信号  $\varepsilon$  のある初期値  $\varepsilon_0$  から出発して1サイクルたつた後、また  $\varepsilon_0$  にもどるリミットサイクルをあらわしている。すなわちこの場合  $\varepsilon$  の自励振動の振幅は  $\varepsilon_0$  である。そこで第3.4図において  $a$  は自励振動をしているときの速度の振幅であるから、 $\varepsilon_0 = a\omega$  とおき第3.3図から  $F/K$  と  $L$  の関係を求めれば  $\varepsilon_0 = \text{一定}$  とし、 $\zeta$  をパラメータとしたとき第3.5図、 $\zeta$  を一定とし  $\varepsilon_0$  をパラメータとしたとき第3.6図の実線を得る。



第3.5図 安定限界曲線 ( $\varepsilon_0$ : 一定)



第3.6図 安定限界曲線 ( $\zeta$ :一定)



第3.7図 計算機ブロック線図 ( $x = \frac{\tau}{2}$ ,  $y = \frac{100}{8} \varepsilon$ )

なお、図中○印は第3・7図に示す計算機ブロック線図によるアナログ計算機の演算結果である。両者はよく一致している。むだ時間要素としては円形に配列したコンデンサ上を定速度で回転するモータに直結したブラシを移動させることによつてコンデンサを次々に充電し、ある時間だけずらした別のブラシからその充電電圧をとりだす方式のもの<sup>(20)</sup>を採用した。

第3・5図および第3・6図から摩擦が大きくなるにしたがつて安定領域が増してゆくことがわかる。

### 2・3. 位相面による解析<sup>(21)</sup>

むだ時間を含む系を位相面で解析した例は少なく、例えば1次系の場合について *Cunningham* の研究がある程度である。<sup>(22)</sup>ここでは第2・1節および第2・2節に述べた自励振動の問題および第3・1図の系の過渡応答の問題を位相面によつて解析する。

(3・3)式を取扱う前にまず簡単のため次のような方程式であらわされる線形系について考える。

$$\ddot{x}(\tau) + 2\dot{x}(\tau) + x(\tau - L) = 0, \quad \cdot \equiv d/d\tau \quad (3.12)$$

(3.12)式を位相面に画くために次のように変形する。すなわち

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \delta = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{ただし} \quad \delta = 2\dot{x}(\tau) + x(\tau - L) - x(\tau) \quad (3.14)$$

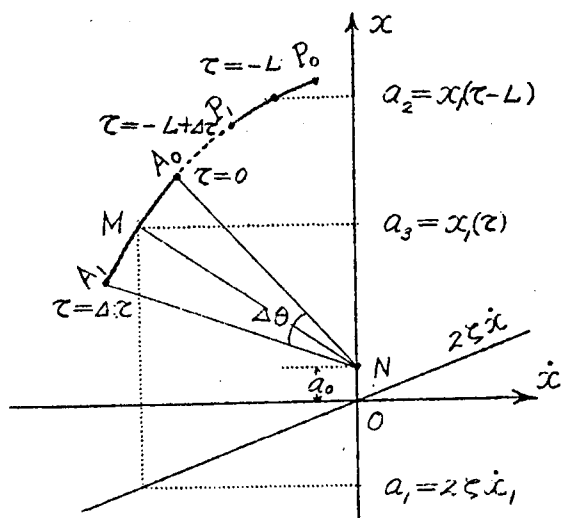
とし、ここに $\delta$ 法<sup>(23)</sup>の原理を適用する。

$-L \leq \tau \leq 0$  の  $x(\tau)$ ,  $\dot{x}(\tau)$  の値は初期値として与えられるから、いま  $\Delta\tau = L/n$  ( $n$ : 正の整数) として第3・8図に示すように  $\tau = -L$ ,  $(-L + \Delta\tau)$ , ...,  $0$  に相当する点を  $P_0, P_1, \dots, A_0$  とし、これを  $\dot{x}-x$  平面にあらわす。このようなとき  $A_0$  点から出発して時間  $\Delta\tau$  後に到達する  $A_1$  点は次のようにして求められる。

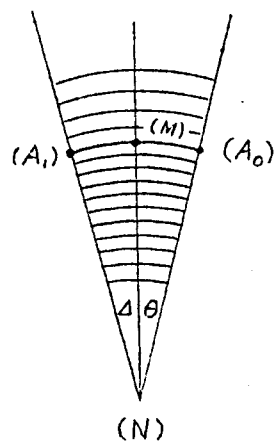
$A_0 A_1$  区間での  $\delta$  の平均値  $\delta_0$  は、この区間の平均値  $M$  に対する (3.13) 式の右辺の各項に対する値を第3・8図に示すように

$$2\dot{x}_1 = a_1, \quad x_1(\tau - L) = a_2, \quad x_1(\tau) = a_3,$$



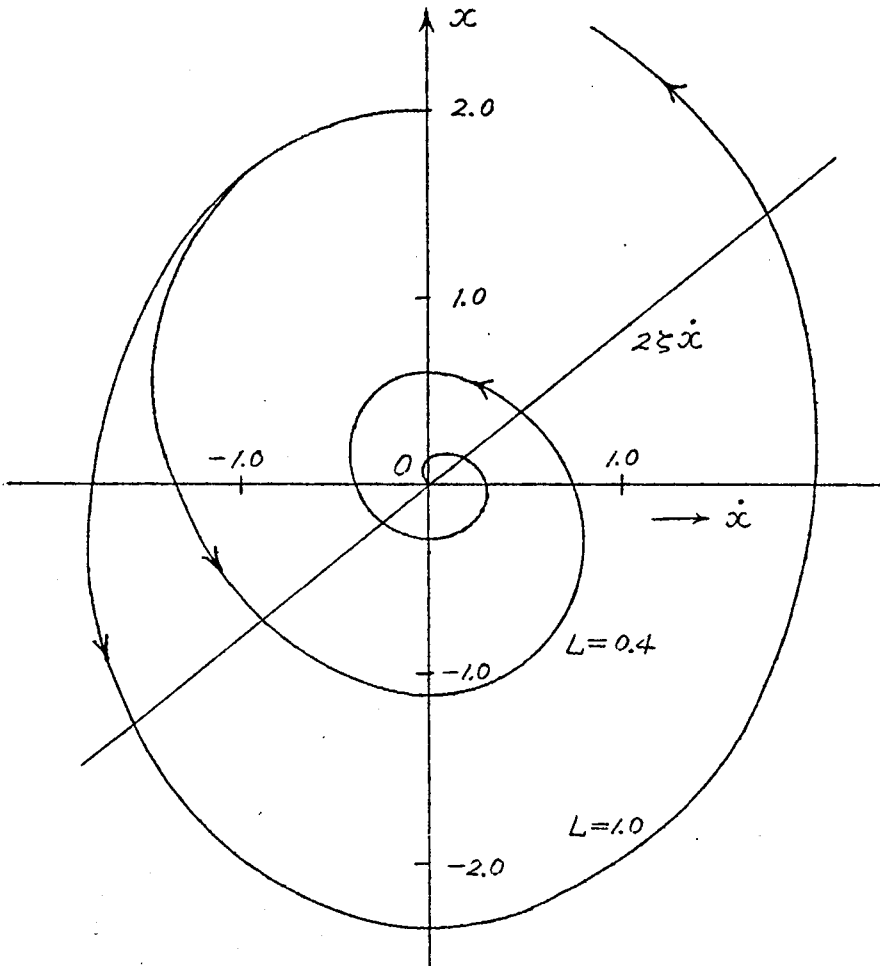


第3.8図  $\delta$ 法によるむだ時間のある系の位相面軌跡の書き方



第3.9図  $\Delta\theta$ なる角をもつ円弧群

とし、 $a_1 + a_2 - a_3 = -a_0$  ( $a_0 > 0$ ) とすると  $\delta_0 = -a_0$  となる。すなわち、この場合円弧  $A_0 A_1$  の中心  $N$  は  $ON = a_0$  にある。点  $N$  が弧  $A_0 A_1$  に対しては微小角  $\Delta\theta$  は  $\Delta\tau$  が一定のときは一定であるから、 $N$  を求めて  $A_0$  から円弧を  $\Delta\theta$  だけひけば  $A_1$  点を得ることになる。座標軸を図の如くとりときは  $\Delta\tau = \Delta\theta$  で与えられるので、<sup>(24)</sup> あらかじめ第3.9図に示すような  $\Delta\theta$  なる角をもつ円弧群を画いた透明紙を用いて、試行法によって (3.14) 式を満足する  $N$  点を求めることができる。(3.14) 式の値を図の上で計算するのは、さきに適当にデバイダーを用いて  $(a_2 - a_3)$  をとり、それとあらかじめひいておいた  $\delta_1 = 2\zeta\dot{x}$  の直線から与えられる  $a_1$  との和をとればよい。1 点をとるのに平均して 2, 3 回の試行で求める点を得る。 $N$  点が定まれば  $A_1$  点は透明紙上でただちに定まる。 $A_1$  点が求まれば順次この操作を続けてゆけばよい。第3.10図はこのような方法で描いた (3.12) 式の位相面軌道である。ただし初期条件として  $-L \leq \tau \leq 0$  で  $x = 2$ ,  $\dot{x} = 0$  とし、 $\zeta = 0.4, 1.0$ ,  $\Delta\tau = 0.2$  とした。むだ時間  $L = 0.4$  のときは安定、 $L = 1.0$  のときは不安定で発散してゆくことがわかる。



第3.10図 むだ時間のある系の位相面軌道

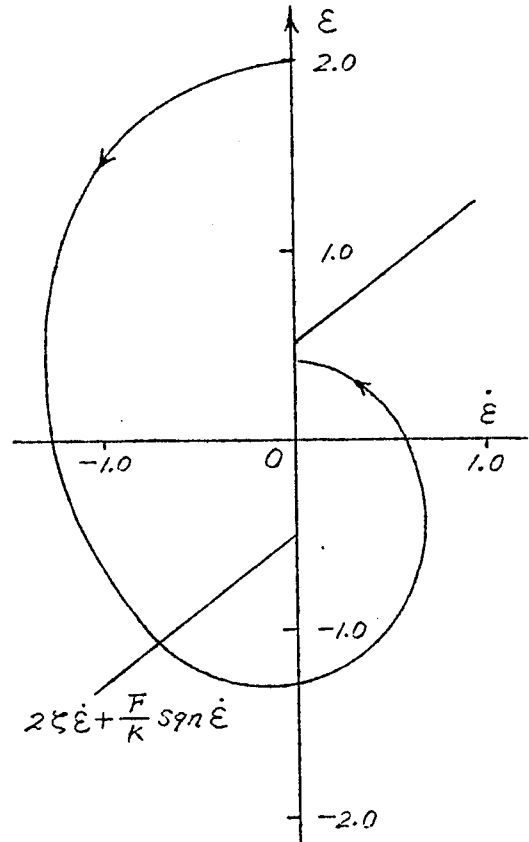
さて、以上述べたような方法によって(3.3)式の位相面軌道を描くことができる。すなわちこの場合(3.3)式を

$$\ddot{\varepsilon}(\tau) + \varepsilon(\tau) + \delta = 0 \quad (3.15)$$

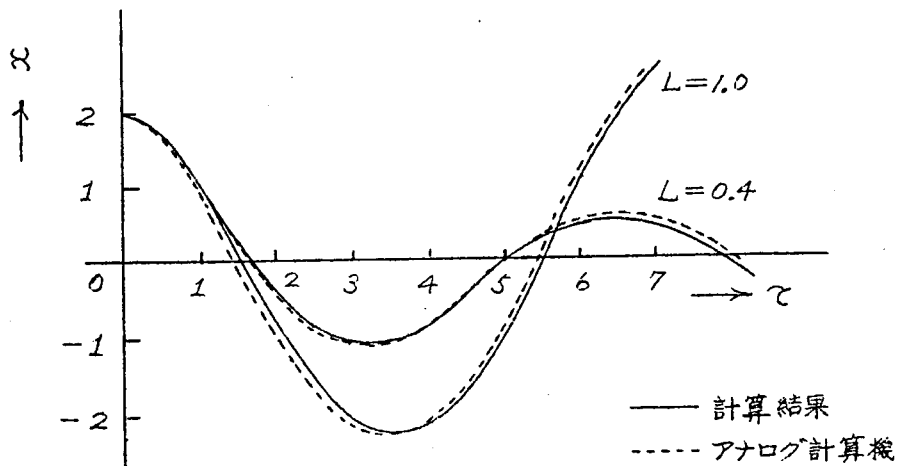
ただし  $\delta = 2\xi\dot{\varepsilon}(\tau) + \varepsilon(\tau - L) + \frac{F}{K} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}(\tau) - \varepsilon(\tau)$  (3.16)

とおく。全く同様に $\Delta\tau$ を適当にえらび、 $\Delta\tau = \Delta\theta$ なる角をもつ円弧群を描いた透明紙を挟って試行法により位相面軌道を描いてゆくわけであるが、(3.16)式を計算する場合は、 $2\xi\dot{\varepsilon}(\tau) + \frac{F}{K} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}(\tau)$ の直線

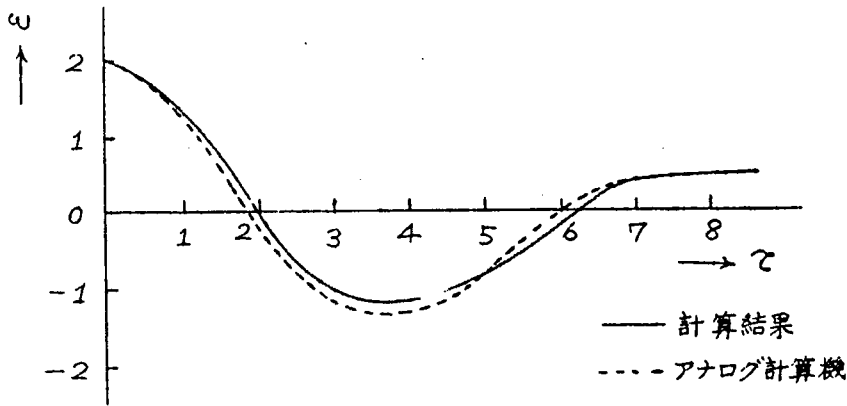
を位相面上に描いておく  
と便利である。1例として  
 $\zeta=0.4$ ,  $\frac{F}{K}=0.5$ ,  
 $L=1.0$  とし, 階段状入力  
の大きさを2とすれば初期条  
件として, 時間の原点を  $\tau=L$   
にとると  $-L \leq \tau \leq 0$  で  $\varepsilon=2, \dot{\varepsilon}=0$   
となるから,  $\Delta\tau=0.2$  とし  
(3.3)式の位相面軌道をか  
くとオ3.11図を得る。軌道  
は  $\dot{\varepsilon}=0$  で  $|\varepsilon(\tau-L)| \leq \frac{F}{K}$  と  
なったとき, サーボモータへ  
の入カトルクが摩擦トルクに  
うちかつことができず, そ  
こで停止する。そのときの  $\varepsilon$   
の値が定常誤差となるわけ  
である。オ3.12図およびオ3.  
13図はオ3.10図およびオ3.



オ3.11図 クーロン摩擦とむだ時間  
のある系の位相面軌道



オ3.12図 (3.12)式の過渡応答 ( $\zeta=0.4$ )

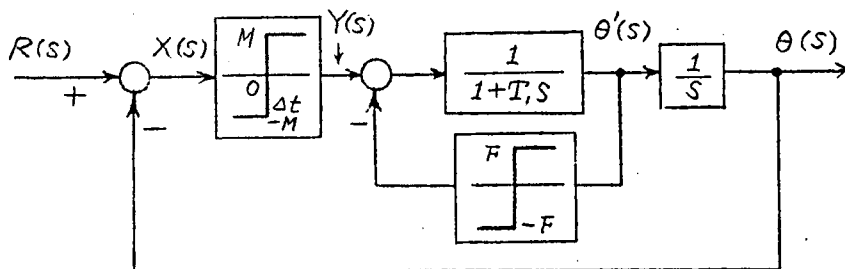


第3.13図 (3.3)式の過渡応答 ( $\zeta=0.4$ ,  $\frac{F}{K}=0.5$ ,  $L=1.0$ )

11図を、時間を横軸にとつてかきなおしたものである。図で点線はアナログ計算機の演算結果であつて、かなりよく一致していることがわかる。

### 3. リレーの切りかえにむだ時間がある場合 <sup>(25)</sup>

すでに第2章にのべたようなクーロン摩擦のあるサーボ系をリレー制御する場合、普通の電磁リレーのような場合にはリレーが一方の接点を開いてから他方の接点に閉じるまでに時間を要し、このリレーの切りかえに要するむだ時間のために、たとえ系が2次おくれでリレー特性が理想的なものであつても、この系に自励振動を発生し不安定ならしめる。また、強制振動入力に対する基本調波振動の発生限界もこのむだ時間の



第3.14図 クーロン摩擦とむだ時間のあるリレー要素を持つサーボ機構の構成図

ためにいちぢるしい影響をうける。

本節ではこのむだ時間による系の動作に対しクーロン摩擦がどのように影響するかについて考察する。簡単のためにリレーはヒステリシスのない理想的な特性をもつものとし、このような特性のリレーが第3・14図のように挿入されたサーボ機構の振動について考察する。ただし各変数の表示は第2・1図のそれに同じとする。またリレーにヒステリシスがある場合も全く同様にして論ずることができるのでここでは省略する。

### 3.1. 強制振動

#### 3.1.1. 出力に停滯を生じない場合の基本調波振動

第3・14図のリレーサーボ機構に

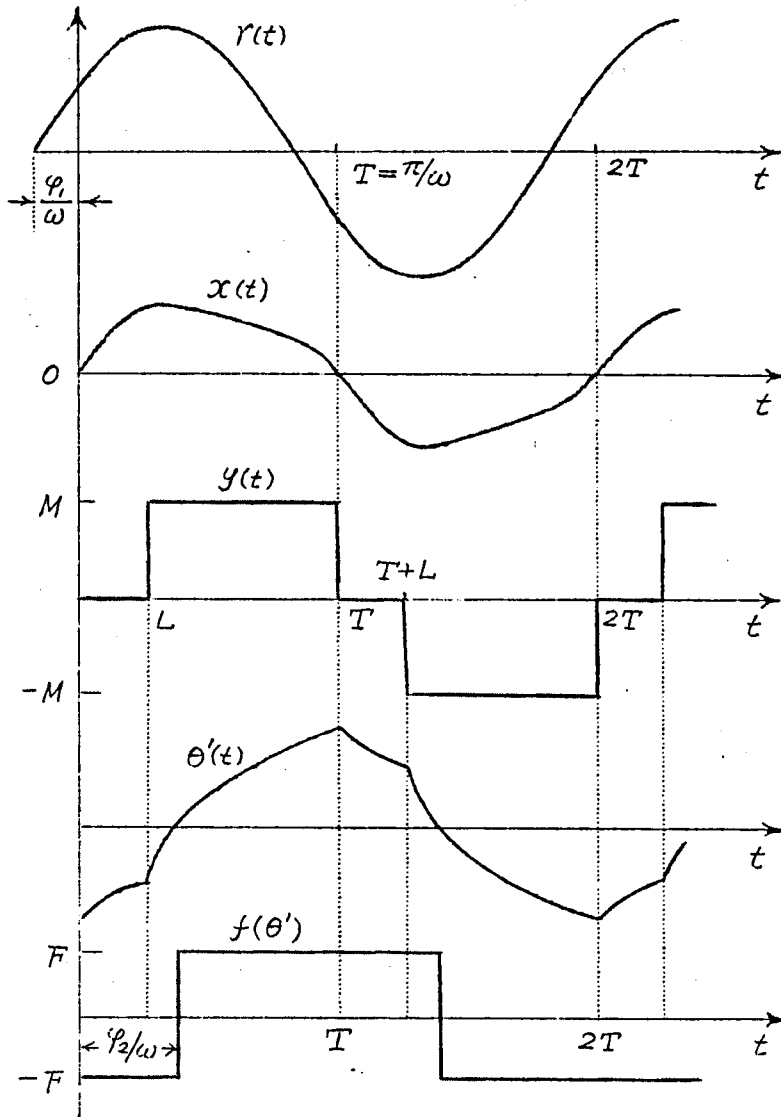
$$r(t) = A \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (3.17)$$

なる入力信号を加えた場合に、これと同一角周波数の基本調波振動を発生している定常状態において、リレーの出力が負から零になる時点を経験の原点にとり、そのときの入力信号の位相角を  $\varphi_i$  とする。このようにしたときリレーサーボ機構の出力に停滯現象を生じない場合には、この系の諸量は第3・15図に示すように変化するものと考えられ、リレーの切りかえ時点において満足すべき条件は(2.15)式において  $n=0$  とおいて得られる。またこのリレーサーボ機構の出力  $\theta(t)$  はその線形部  $G(s)$  にリレーの出力トルクおよびクーロン摩擦トルクがそれぞれ別々に加わったときの出力の合成値として得られる。そこで第3・15図に示したリレーの出力  $y(t)$  のラプラス変換  $Y(s)$  は

$$Y(s) = \frac{M}{s} \cdot \frac{1 - \exp(-\overline{T-L})s}{1 + \exp(-Ts)} \exp(-Ls) \quad (3.18)$$

となるから、このリレー出力  $y(t)$  にもとづく線形部の出力を  $\theta_M(t)$  とすると、 $T = \pi/\omega$  として

$$\frac{\theta_M(t)}{KM} = -\frac{1}{2}(T-L) + T_i \left\{ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T-L}{T_i}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{T_i}\right)} \right\} \exp\left(-\frac{t}{T_i}\right)$$



第3.15図 リレーの切りかえにむだ時間のある場合の制御系  
諸量の時間的变化（停滞のない場合）

$$\frac{\theta_M(t)}{KM} = \left( t - L - \frac{T-L}{2} \right) - T_1 \left\{ 1 - \frac{1 + \exp\left(-\frac{L}{T_1}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)} \exp\left(-\frac{t-L}{T_1}\right) \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq t \leq L \\ L \leq t \leq T \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

となる。

一方、クーロン摩擦トルク  $f(\theta')$  は第3.15図に示すように変化する  
ので、このトルクを加え合わせ点において、符号を反転することなく線  
形部に加えた場合の出力を  $\theta_F(t)$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta_F(t)}{KM} &= \frac{F}{M} \left[ -\left(t + \frac{T}{2} - \frac{\varphi_2}{\omega}\right) + T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t+T-\varphi_2/\omega}{T_1}\right) \right\} \right] & 0 \leq t \leq \varphi_2/\omega \\ \frac{\theta_F(t)}{KM} &= \frac{F}{M} \left[ \left(t - \frac{T}{2} - \frac{\varphi_2}{\omega}\right) - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t-\varphi_2/\omega}{T_1}\right) \right\} \right] & \varphi_2/\omega \leq t \leq T \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

となる。そこでクーロン摩擦トルクが加え合わせ点において、リレーの  
出力トルクから差引かれることを考慮すれば、この場合のリレーサーボ  
機構の出力は

$$\theta(t) = \theta_M(t) - \theta_F(t) \quad (3.21)$$

より求められる。

また出力速度は

$$\theta'(t) = \theta'_M(t) - \theta'_F(t) \quad (3.22)$$

で与えられる。ただし  $\theta'_M(t)$ ,  $\theta'_F(t)$  はそれぞれ  $\theta_M(t)$ ,  $\theta_F(t)$  の  $t$  に關  
する導関数であつて (3.19) および (3.20) 式から次のようにして求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta'_M(t)}{KM} &= -\frac{1 - \exp\left(-\frac{T-L}{T_1}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)} \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right), & 0 \leq t \leq L \\ \frac{\theta'_M(t)}{KM} &= 1 - \frac{1 + \exp\left(-\frac{L}{T_1}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)} \exp\left(-\frac{t-L}{T_1}\right), & L \leq t \leq T \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta'_F(t)}{KM} &= \frac{F}{M} \left[ -1 + \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t+T-\varphi_2/\omega}{T_1}\right) \right], & 0 \leq t \leq \varphi_2/\omega \\ \frac{\theta'_F(t)}{KM} &= \frac{F}{M} \left[ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t-\varphi_2/\omega}{T_1}\right) \right], & \frac{\varphi_2}{\omega} \leq t \leq T \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

フーロン摩擦トルクの極性が反転する時点において

$$\theta'(\varphi_2/\omega) = 0$$

であるから、出力に停滞現象を生じない場合には  $L \leq \varphi_2/\omega$  であることを考慮して、(3.22), (3.23) および (3.24) 式を用いて

$$\frac{\varphi_2}{\omega} = L + T_1 \log \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{L}{T_1}\right) \right\} \left( 1 + \tanh \frac{T}{2T_1} \right)}{1 + \frac{F}{M} \tanh \frac{T}{2T_1}} \quad (3.25)$$

を得る。そこでむだ時間  $L$  が定まれば、この式から  $F/M$  をパラメータとして、リレー出力と出力速度の位相差  $\varphi_2$  を決定することができる。

次に基本調波振動の発生限界を求める。

リレーの切りかえのはじまる時点においては、リレーの入力は零であるから

$$x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = A \sin(\pi + \varphi_1) - \theta\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \quad (3.26)$$

である。したがってこの場合には (3.19) ~ (3.21) 式を用いると

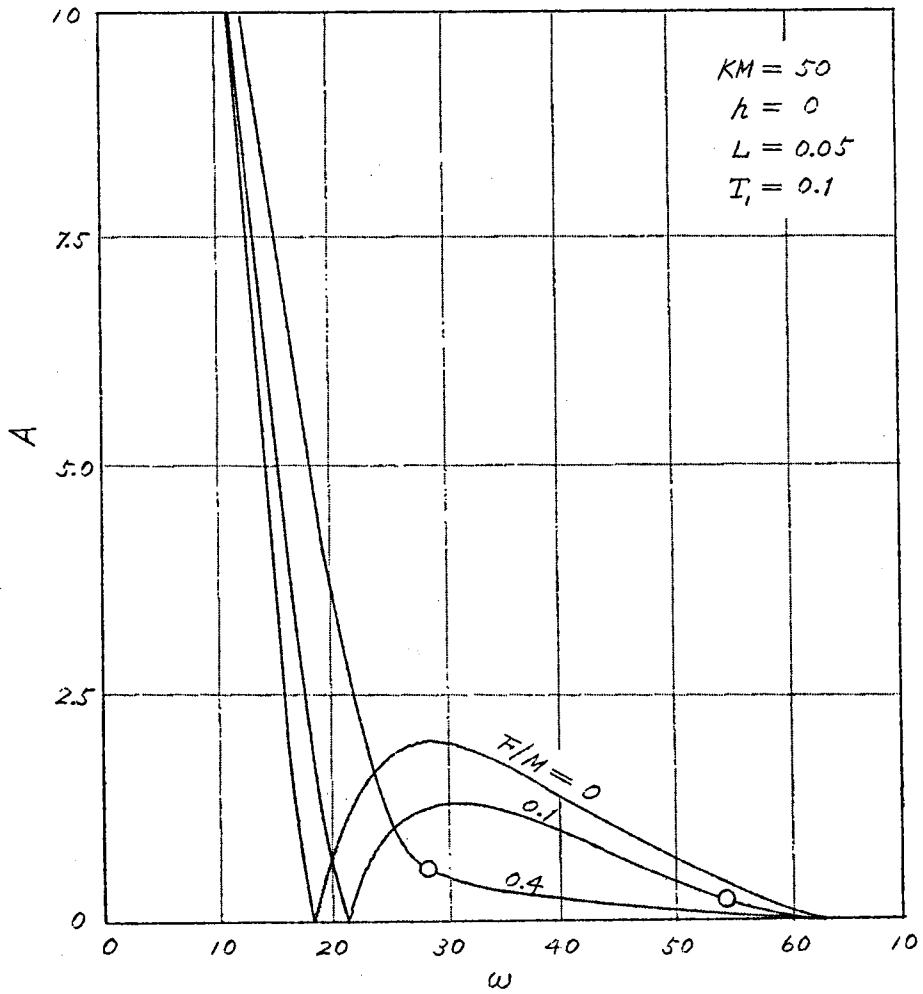
$$\begin{aligned} \frac{A}{KM} \sin \varphi_1 + \frac{F}{M} \frac{\varphi_2}{\omega} + \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left(\frac{T}{2} - T_1\right) - \frac{L}{2} + T_1 \left[ \frac{1 + \exp\left(\frac{L}{T_1}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)} - \frac{F}{M} \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{\varphi_2}{\omega T_1}\right) \right] \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.25) 式を使って (3.27) 式を整頓すると

$$\frac{A}{KM} \sin \varphi_1 = -\frac{F}{M} \frac{\varphi_2}{\omega} - \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left(\frac{T}{2} - T_1\right) + \frac{L}{2} - T_1 \left(1 - \frac{F}{M}\right) \exp\left(-\frac{\pi - \varphi_2}{\omega T_1}\right) \quad (3.28)$$

を得る。これを用いて前章の場合と同様にして入力信号と同一角周波数の基本調波振動を発生する領域を求めることができる。第3.16図はその1例であつて、これらの曲線より上の領域で基本調波振動を発生する。なお、図中丸印で示した点より小さい角周波数に対する曲線が上のようにして得られる。第3.16図を第2.9図と比較すれば、むだ時間  $L$  の存在のために基本調波振動の発生領域が、むだ時間のない場合に比していちぢるしく減少していることがわかる。さらにまた  $F/M$  の値によつては





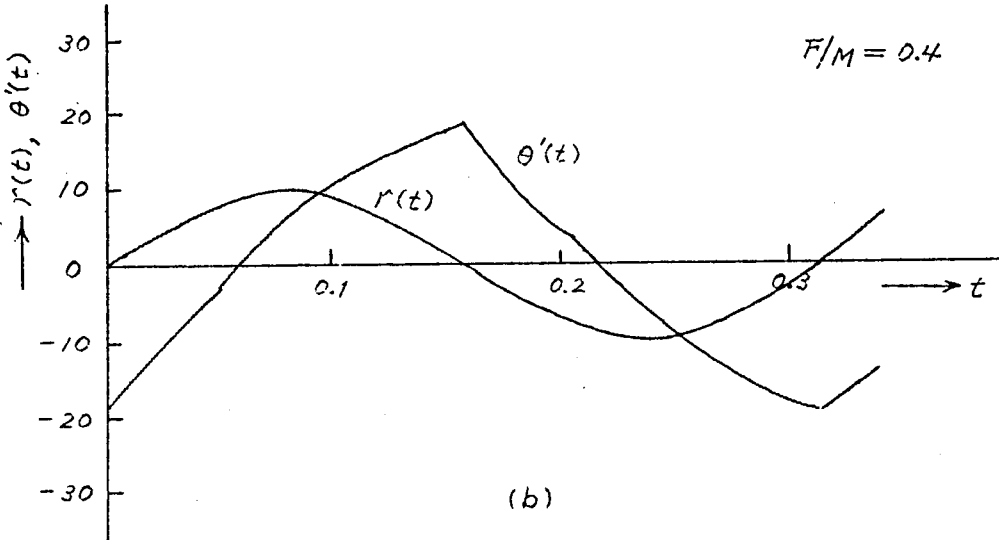
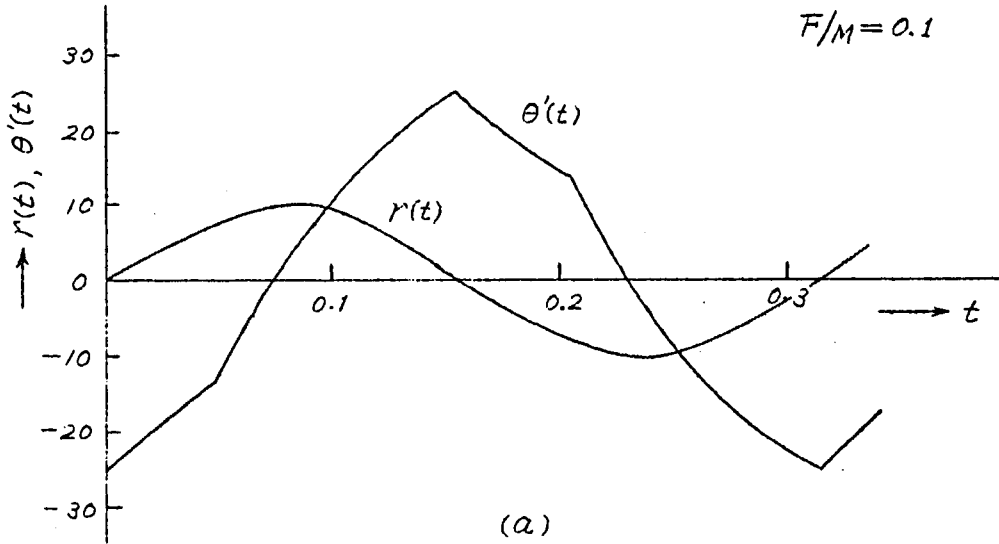
第3.16図 リレーの切りかえにむだ時間のある場合  
の基本調波振動の発生領域

系に自励振動を発生することもわかる。

次に出力速度波形を求める。

$F/M$ と $L$ が与えられたとき、正弦波状入力に対して(3.28)式から $\varphi_1$ を、また(3.25)式より $\varphi_2$ を求めることができ、したがって(3.19)～(3.21)式からこの場合の出力波形 $\theta(t)$ を、また(3.22)～(3.24)式から出力速度波形 $\theta'(t)$ を正確に求めることができる。1例として $T_i = 0.1$ 、 $KM = 50$ 、 $\omega = 20$ 、 $A = 10$ 、 $L = 0.05$ の場合の出力速度波形を

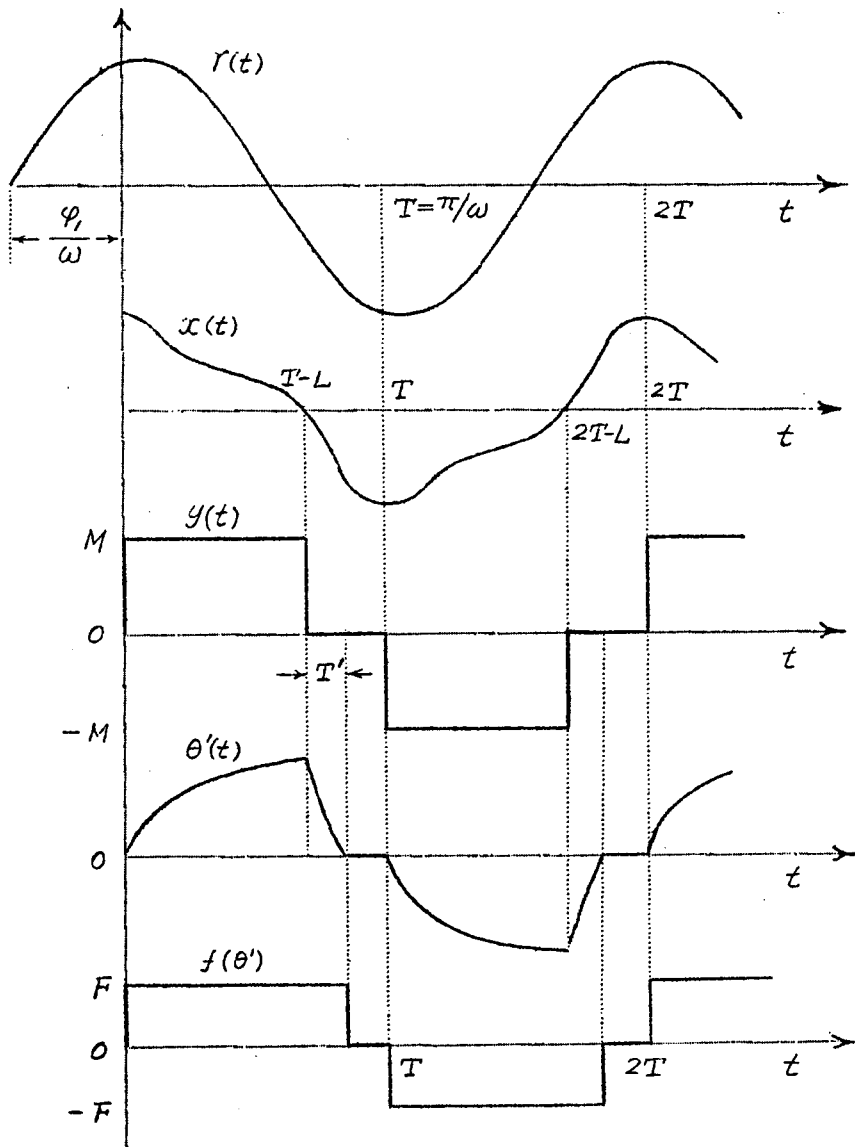
$F/M = 0.1$  および  $0.4$  の場合について計算した結果を第3.17図 (a), (b) に示す。



第3.17図 強制入力に対する出力速度波形  
( $KM=50$ ,  $T_i=0.1$ ,  $L=0.05$ ,  $A=10$ ,  $\omega=20$ )

### 3-1-2. 出力に停滯現象を生ずる場合の基本調波振動

入力角周波数  $\omega$ ，むだ時間  $L$  および  $F/M$  の値如何によつては  $\varphi_2/\omega < L$  となり，リレーの出力トルクがクーロン摩擦トルクにうちかつことができず，系の出力は， $t=L$  となつてリレーの出力トルクがクーロン摩擦トルクにうちかつまで停滯現象を生ずる。この場合のこのサーボ機構の



第3-18図

リレーの切りかえにむだ時間のある場合の制御系諸量の時間的变化（停滯のある場合）

諸量は第3.18図に示すように変化し、出力速度  $\theta'(t)$  はリレーの出力トルクが零から  $\pm M$  に変化する時点に於いて零から変化しはじめ、リレーの出力トルクが再び零になつた後に零となり、半周期  $T$  毎にこれをくりかえすことになる。そこでリレーの出力が零から正になる時点を経験の原点にとって考えると、 $0 \leq t \leq T-L$  において出力  $\theta(t)$  の変化は

$$T_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} - K(M-F) = 0 \quad (3.29)$$

で表わされる。  $\theta(0) = \theta_0$  とおけば  $\theta'(0) = 0$  であるから、(3.29)式から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta'(t)}{KM} &= \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left\{1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right\} \\ \frac{\theta(t)}{KM} &= \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left\{t - T_1 + T_1 \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right\} + \frac{\theta_0}{KM} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

となる。したがつて  $t = T-L$  における出力および出力速度は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta'(T-L)}{KM} &= \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left\{1 - \exp\left(-\frac{T-L}{T_1}\right)\right\} \\ \frac{\theta(T-L)}{KM} &= \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left\{T-L - T_1 + T_1 \exp\left(-\frac{T-L}{T_1}\right)\right\} + \frac{\theta_0}{KM} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

となる。

つぎに  $T-L \leq t \leq T$  においてはリレーの出力トルクは零であり、このリレーサーボ機構の線形部にはクーロン摩擦トルクののみが作用する。そこで便宜上、リレーの出力が  $M$  から零になる時点を経験の原点にとって考えると、リレーの切りかえに要するむだ時間  $L$  内での出力  $\theta(t)$  の変化は

$$T_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + KF = 0 \quad (3.32)$$

で表わされる。これを (3.31) 式で与えられる値を初期値として解くと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta'(t)}{KM} &= C_1 \exp\left(-\frac{t}{T'}\right) - \frac{F}{M} \\ \frac{\theta(t)}{KM} &= \frac{\theta_0}{KM} - \frac{F}{M}t + C_2 - C_1 T' \exp\left(-\frac{t}{T'}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left\{1 - \exp\left(-\frac{T-L}{T'}\right)\right\} + \frac{F}{M} \\ C_2 &= \left(1 - \frac{F}{M}\right) (T-L) + T' \frac{F}{M} \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

である。リレーの出力トルクが  $M$  から零になってから  $T'$  だけ時間が経過したとき  $\theta'(t) = 0$  となるとすれば、(3.33) 式の第一式から

$$T' = T' \log \frac{C_1}{F/M} \quad (3.35)$$

を得る。この値を (3.33) 式の第二式に代入して得られる  $\theta(t)$  の値は、このリレー機構が入力信号と同一角周波数の基本調波振動を発生している状態では  $-\theta_0$  に等しくなければならない。したがって

$$\frac{\theta_0}{KM} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{F}{M} T' - \left(1 - \frac{F}{M}\right) (T-L) \right\} \quad (3.36)$$

となり、 $\theta(t)$  はつぎにリレーの切りかえが起るまで  $-\theta_0$  の値を保持する。このリレーの切りかえ時点においてはリレーの入力は零であるから

$$A \sin(\pi + \varphi_1) + \theta_0 = 0$$

すなわち

$$\frac{A \sin \varphi_1}{KM} - \frac{\theta_0}{KM} = 0 \quad (3.37)$$

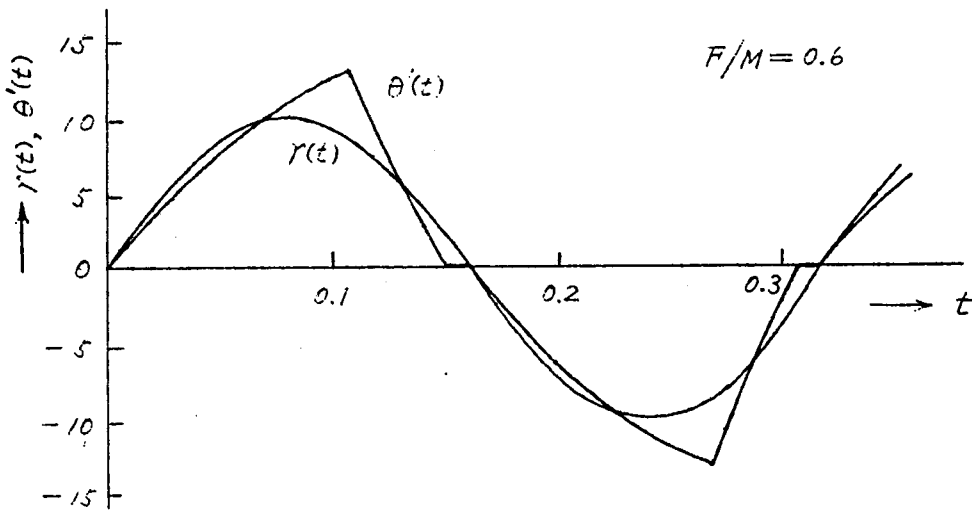
となる。そこで

$$A/KM \geq |\theta_0/KM| \quad (3.38)$$

が成立するとき限り (3.37) 式から  $\varphi_1$  を決定することができる。したがって (3.38) 式を用いて基本調波振動の発生領域を決定することができる。この発生限界を第3.16図の丸印で示した点より大きい角周波

数に対する曲線で示した。

また、上のようにして  $\theta$ , および  $\varphi$ , が定まれば,  $0 \leq t \leq T-L$  のはんいでは (3.30) 式,  $T-L \leq t \leq T$  においては (3.33), (3.34) 式を用いて入力信号に対するこの場合の出力および出力速度波形を正確に求めることができる。1例として  $T_1=0.1$ ,  $KM=50$ ,  $\omega=20$ ,  $A=10$ ,  $L=0.05$  の場合の出力速度波形を  $F/M=0.6$  の場合について計算した結果を第3.19図に示した。



第3.19図 出力速度波形(停滞のあるとき)

( $KM=50$ ,  $T_1=0.1$ ,  $L=0.05$ ,  $A=10$ ,  $\omega=20$ )

### 3.1.3. 出力に停滞を生ずる限界

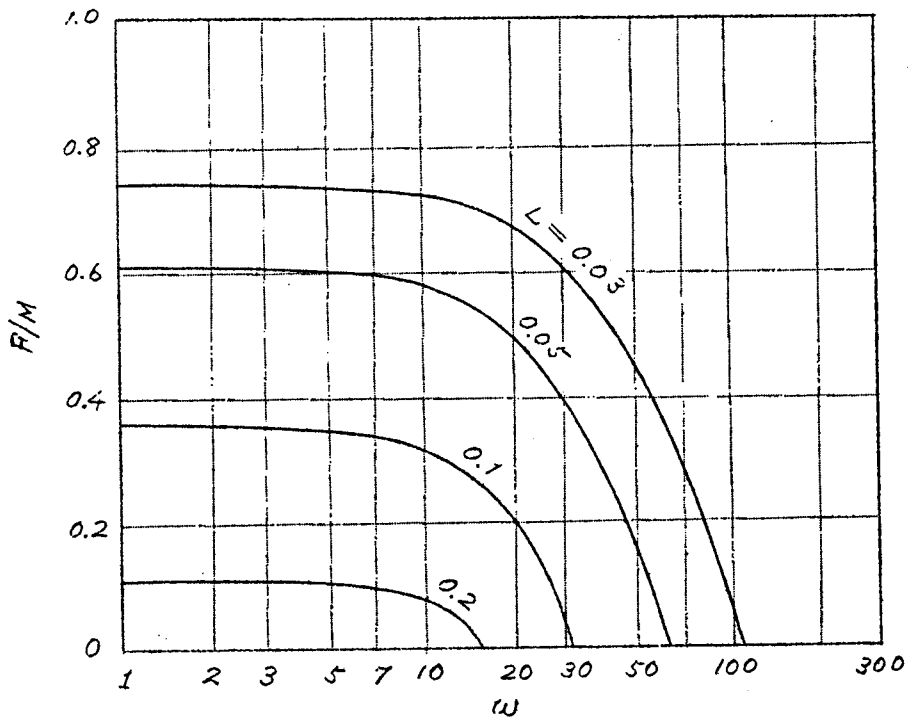
第3.15図からも明らかなように,  $L \leq \varphi_2/\omega$  であれば出力速度  $\theta'(t)$  が零になったときにリレーは  $|M|$  なる出力トルクを示し, しかも  $F < M$  であるから出力に停滞現象を生ずることはない。これに対して  $L > \varphi_2/\omega$  であれば出力速度が零になったときにリレーの出力トルクは零であるから, リレーの切りかえが完了してその出力トルクが現われるまでサーボ機構の出力に停滞現象を生ずることになる。したがって出力に停滞現象を生ずる限界は

$$L = \varphi_2 / \omega \quad (3.39)$$

で与えられる。そこで (3.25) 式から出力に停滞現象を生ずる限界での角周波数  $\omega$  を求めると

$$\omega = \frac{\pi}{T_1 \log \frac{1 - F/M}{\exp\left(-\frac{L}{T_1}\right) - \frac{F}{M}}} \quad (3.40)$$

となる。むだ時間  $L$  をパラメータとして、この関係を満足する  $F/M$  と  $\omega$  の関係を示せば第3.20図のようになり、これらの曲線より上の領域で停滞現象を生ずる。



第3.20図 出力に停滞現象を生ずる限界 ( $T_1 = 0.1$ )

### 3.2. 自励振動

さきにも述べたように、リレーの切りかえに要するむだ時間のためにおくれを生じて系は自励振動を発生する。しかし、第3.16図からむわ

かるように、自励振動が存在するためには入力振幅  $A$  が零の場合に  $\omega$  がある値をもつことが必要であるが、 $F/M=0.4$  となると自励振動を発生しないことがわかる。すなわち、クーロン摩擦の大きさがある程度以上の値であると、このクーロン摩擦トルクによって振動がおさえられ自励振動が発生しなくなる。

本節ではクーロン摩擦とむだ時間の自励振動の発生限界、および自励振動角周波数に対する関係について考察した。

### 3.2.1. 自励振動の発生限界

第3.11図からわかるように自励振動が発生するためには、与えられたむだ時間  $L$  に対し、その自励振動角周波数  $\omega$  が  $L < \varphi_2/\omega$  を満足していることである。 $L \geq \varphi_2/\omega$  においてはリレー出力がクーロン摩擦トルクより小となる所があり、そこではクーロン摩擦トルクのため系の出力が停滞し、自励振動を持続することはできない。

さて、自励振動の場合の系の出力  $\theta(t)$  はさきにのべた強制振動の場合の式(3.16)と全く同様である。そこでリレーのきりかえ条件

$$\theta(\pi/\omega) = 0$$

より

$$\frac{F}{M} \frac{\varphi_2}{\omega} + \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left(\frac{T}{2} - T_1\right) - \frac{L}{2} + T_1 \left(1 - \frac{F}{M}\right) \exp\left(-\frac{\pi - \varphi_2}{\omega T_1}\right) = 0 \quad (3.41)$$

を得る。自励振動の発生限界においては  $\varphi_2/\omega = L$  であるから、この限界での自励振動の角周波数を  $\omega_s$  とすれば、 $\varphi_2/\omega_s = L$  を(3.41)式に代入して

$$\frac{F}{M} L + \left(1 - \frac{F}{M}\right) \left(\frac{T_s}{2} - T_1\right) - \frac{L}{2} + T_1 \left(1 - \frac{F}{M}\right) \exp\left(-\frac{\pi - \omega_s L}{\omega_s T_1}\right) = 0 \quad (3.42)$$

となる。ただし、 $T_s = \pi/\omega_s$  である。

一方、 $\omega_s$  は(3.40)式より

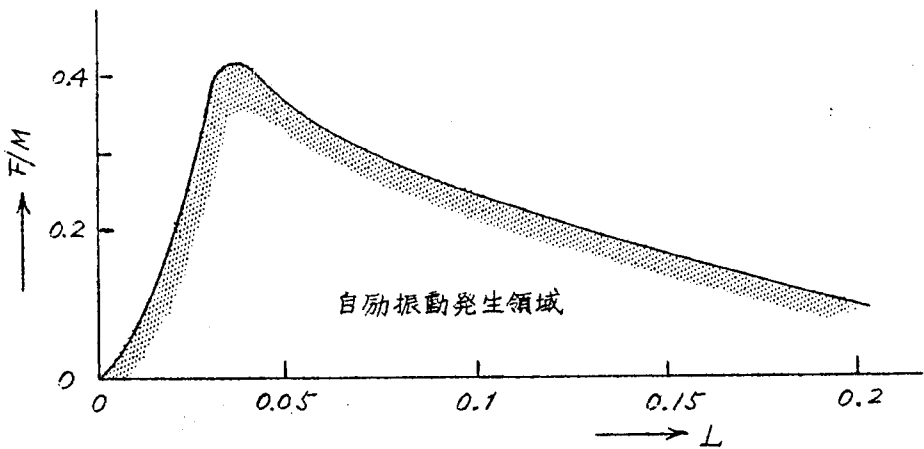
$$\omega_s = \frac{\pi}{T_1 \log \frac{1 - \frac{F}{M}}{\exp\left(-\frac{L}{T_1}\right) - \frac{F}{M}}} \quad (3.43)$$



で与えられるから、(3.43)式を(3.42)式に代入して  $\omega_s$  を消去し、 $F/M$  と  $L$  の関係を求めればよい。そのため(3.42)式と(3.43)式より  $\exp\left(-\frac{\pi}{\omega_s T_1}\right)$  を消去して得られる

$$\omega_s = \frac{\left(1 - \frac{F}{M}\right)\pi}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - 2\frac{F}{M}\right)\frac{L}{2} - T_1 \frac{F}{M} \left(1 - \exp\left(\frac{L}{T_1}\right)\right)} \quad (3.44)$$

と(3.43)式とから図式的に  $F/M$  と  $L$  の関係を求めることができる。この関係を示したのが第3.21図である。第3.21図は自励振動の発生限界を与える  $F/M$  と  $L$  の関係を示したもので、与えられた  $F/M$  と  $L$  によって定まる点が曲線より上にあれば系は自励振動を発生せず、下であれば自励振動を発生する。

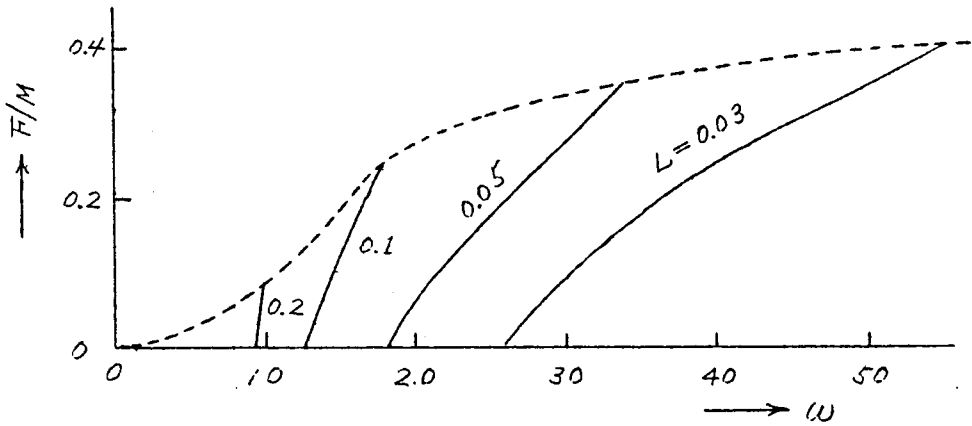


第3.21図 自励振動の発生領域

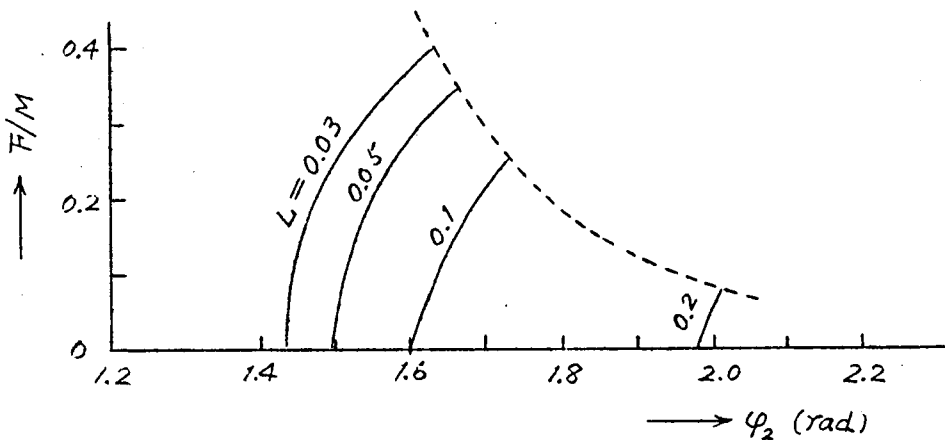
むだ時間  $L$  が大きくなると系のおくれが大きくなり、自励振動の発生領域は増加してゆくが、 $L$  がある程度以上大きくなると、第3.20図からもわかるように出力に停滞を生ずる領域が大となり、したがって自励振動の発生領域が減じてゆくと考えられる。クーロン摩擦のない系では、むだ時間  $L$  のために必ず自励振動を発生するのであるが、クーロン摩擦がある程度存在すると、たとえ  $L$  が大でも自励振動を発生しなくなることがわかる。

### 3.2.2. 自励振動角周波数

第3.21図の曲線の下領域で与えられる  $F/M$  と  $L$  の値に対して系は自励振動を発生する。リレー出力と出力速度の位相差  $\varphi_2$  は、さき以前節で求めた  $\varphi_2$  と全く同じであるので(3.25)式を(3.41)式の左辺に代入し、右辺が零となる  $\omega$  を求めれば、それが自励振動角周波数  $\omega$  を与える。得られた  $\omega$  を(3.25)式に代入すれば、与えられた  $F/M$  と  $L$  に対する  $\varphi_2$  を得る。第3.22図および第3.23図は、このようにして求めた  $F/M$  と自励振動角周波数およびリレー出力と出力速度の位相差  $\varphi_2$  を夫々  $L$  をパラメータにして示したものである。なお図中点線は自励振



第3.22図 自励振動角周波数

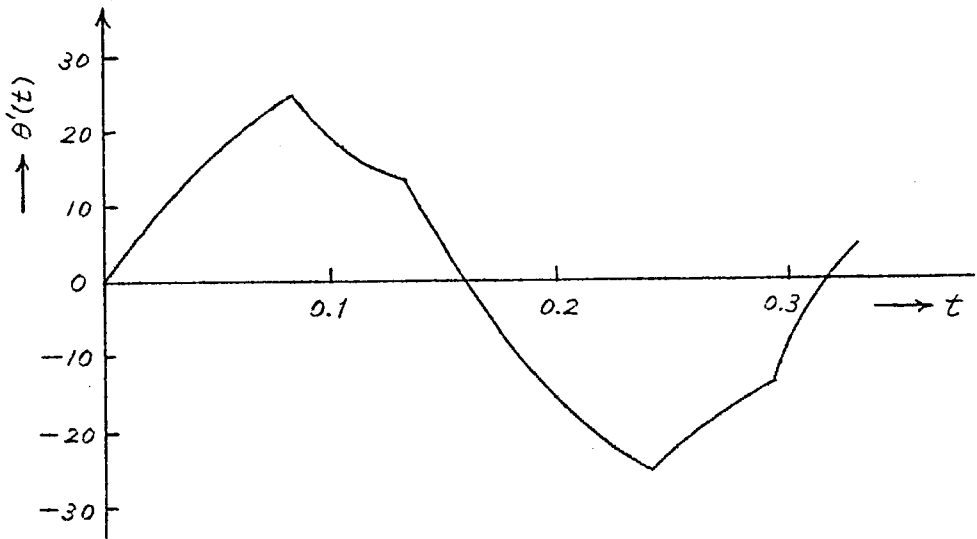


第3.23図 自励振動の出力速度と誤差信号の位相差

動の限界の角周波数と  $F/M$  およびそのときの  $\varphi_2$  と  $F/M$  の関係を示すもので、この曲線の下領域で自励振動が発生する。

### 3.2.3. 自励振動波形

自励振動の発生領域を満足する  $F/M$  と  $L$  を与えれば、(3.22), (3.23), (3.24) および (3.25) 式より自励振動波形を計算で求めることができる。一例として  $T_f = 0.1$ ,  $KM = 50$ ,  $L = 0.05$ ,  $F/M = 0.1$  の場合の出力速度波形を第3.24図に示す。



第3.24図 自励振動波形 ( $KM = 50$ ,  $T_f = 0.1$ ,  $L = 0.05$ ,  $F/M = 0.1$ )

### 3.3. 周期振動の安定問題

この節では前節までに述べた強制振動および自励振動の安定性について考察する。ただし強制振動は出力に停滯を生じない場合をあつかうものとする。いま、第3.14図に示すリレーサーボ機構で、制御系の諸量が第3.15図に示すように、 $T = \pi/\omega$  を半周期として周期的に変化している場合に、入力信号  $r(t)$  に加わった微小外乱  $r_d(t)$  にもとづく制御系諸量の微小変化が、この外乱がとりのぞかれた後時間の経過と

もに消滅すれば、もとの同期振動は安定であることになる。

いま第2章の第4節にのべたのと全く同様にして、微小外乱  $r_d(t)$  にもとづく制御系諸量の微小変化をそれぞれ添字  $d$  を付して表わし、また各変数のラプラス変換を大文字を用いて表わすことにすれば、(2.24)式を得たのと全く同様にして

$$X_d(s) = R_d(s) - G(s) \mathcal{L} \left\{ \frac{dy(x)}{dx} x_d - \frac{df(\theta')}{d\theta'} \theta_d' \right\} \quad (3.45)$$

を得る。

ここで

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'} \frac{dy}{dt}$$

であり、また  $\delta$  関数を導入すれば、リレーの切りかえ時点が  $t = k\frac{\pi}{\omega}$  および  $t = k\frac{\pi}{\omega} + L$  であることを考慮して

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|} \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{\pi}{\omega}\right) + \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega} + L)|} \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{\pi}{\omega} - L\right) \quad (3.46)$$

となる。また

$$\left. \begin{aligned} \frac{df(\theta')}{d\theta'} &= \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} \sum_{k=0}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \\ \theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega}) &= \frac{\theta''(\frac{\varphi_2}{\omega} + 0) \cdot \theta''(\frac{\varphi_2}{\omega} - 0)}{\theta''(\frac{\varphi_2}{\omega} + 0) + \theta''(\frac{\varphi_2}{\omega} - 0)} \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

となる。そこで (3.46), (3.47) 式を (3.45) 式に代入し、これに  $\delta$  関数の積分の定理<sup>\*</sup>を適用すると

$$\begin{aligned} X_d(s) = R_d(s) - G(s) & \left[ \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) x_d\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) + \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega} + L)|} \right. \\ & \left. \times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-s\left(k \frac{\pi}{\omega} + L\right)\right\} x_d\left(k \frac{\pi}{\omega} + L\right) - \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-s\left(k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}\right)\right\} \theta_d'\left(k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right] \quad (3.48) \end{aligned}$$

\* 前出、文献(13)参照。

となる。ここで

$$X_d^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) x_d\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) \quad (3.49)$$

$$X_d^*(s, L) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) x_d\left(k \frac{\pi}{\omega} + L\right) \quad (3.50)$$

$$\Theta_d'^*(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-s k \frac{\pi}{\omega}\right) \theta_d'\left(k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \quad (3.51)$$

とおき、(3.49)～(3.51)式を(3.48)式に代入すれば

$$\begin{aligned} X_d(s) = R_d(s) - G(s) & \left[ \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|} X_d^*(s) + \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega} + L)|} \exp(-sL) \cdot X_d^*(s, L) \right. \\ & \left. - \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} \exp\left(-s \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \Theta_d'^*(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

となる。一方、第3.14図からも明らかなように

$$R_d(s) - X_d(s) = \frac{1}{s} \Theta_d'^*(s) \quad (3.53)$$

なる関係があるからこれを用いて

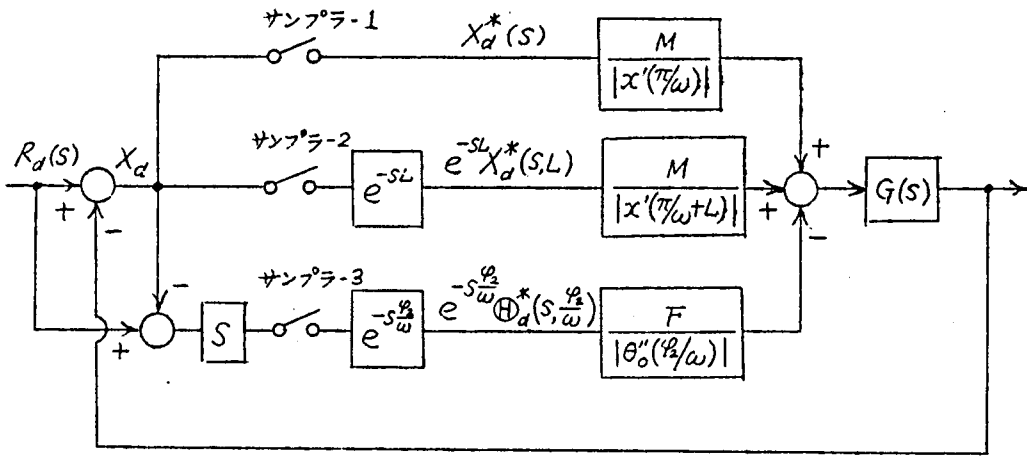
$$\Theta_d'^*(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) = \left[ s R_d(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right]^* - \left[ s X_d(s, \frac{\varphi_2}{\omega}) \right]^* \quad (3.54)$$

を得る。したがってこの場合の周期振動の安定性は、(3.52)、(3.53)両式からわかるように、第3.25図に示す線形サンプル値制御系の安定問題として考えることができる。なお、ここで三つのサンプラは同一周期で、おくれなく動作しているものとする。なお、 $L \geq \varphi_2/\omega$ の場合にはさきに3.1および3.2節に述べたように系の出力に停滞現象が起り、したがってこの場合は系の動作は安定であると考えられ、それ故第3.25図に於いては  $L < \varphi_2/\omega$  であるとする。

さてパルス伝達関係についての

$$X_d^*(s) = \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_d(s + 2jn\omega) \quad (3.55)$$

$$X_d^*(s, L) = \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{(s + 2jn\omega)L\} X_d(s + 2jn\omega) \quad (3.56)$$



第3.25図 (3.52) 式に対応するサンプル値制御系

$$\left[ sX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* = \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{ (s+2jn\omega) \frac{\varphi_2}{\omega} \right\} (s+2jn\omega) X_d(s+2jn\omega) \quad (3.57)$$

なる表示を用いれば、これと(3.52), (3.53)両式を使い、さらに  $X_d^*(s)$ ,  $X_d^*(s, L)$  および  $\left[ sX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^*$  の周期性を考慮して次式を得る。

$$\begin{aligned} X_d^*(s) = & R_d^*(s) - \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|} G^*(s) X_d^*(s) - \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega}+L)|} G^*(s, -L) X_d^*(s, L) \\ & + \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} G^*(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}) \left\{ \left[ sR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* - \left[ sX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \right\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} X_d^*(s, L) = & R_d^*(s, L) - \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|} G^*(s, L) X_d^*(s) - \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega}+L)|} G^*(s) X_d^*(s, L) \\ & + \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} G^*(s, L - \frac{\varphi_2}{\omega}) \left\{ \left[ sR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* - \left[ sX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \left[ sX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* = & \left[ sR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* - \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|} \left[ sG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* X_d^*(s) - \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega}+L)|} \\ & \times \left[ sG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}-L\right) \right]^* X_d^*(s, L) + \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} \left[ sG(s) \right]^* \left\{ \left[ sR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* - \left[ sX_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \right\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

7.7.2 L

$$\left. \begin{aligned}
 G^*(S, \pm \frac{\varphi_2}{\omega}) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pm(S+2jn\omega)\frac{\varphi_2}{\omega}\right\} G(S+2jn\omega) \\
 G^*(S, \pm L) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pm(S+2jn\omega)L\right\} G(S+2jn\omega) \\
 G^*(S, \pm(L-\frac{\varphi_2}{\omega})) &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pm(S+2jn\omega)(L-\frac{\varphi_2}{\omega})\right\} G(S+2jn\omega) \\
 [SG(S, \pm \frac{\varphi_2}{\omega})]^* &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pm(S+2jn\omega)\frac{\varphi_2}{\omega}\right\} (S+2jn\omega) G(S+2jn\omega) \\
 [SG(S, \pm(L-\frac{\varphi_2}{\omega}))]^* &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{\pm(S+2jn\omega)(L-\frac{\varphi_2}{\omega})\right\} (S+2jn\omega) G(S+2jn\omega)
 \end{aligned} \right\} (3.61)$$

(3.58)~(3.60)式より  $X_d^*(S)$ ,  $X_d^*(S, L)$  および  $[SX_d(S, \frac{\varphi_2}{\omega})]^*$  を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 X_d^*(S) &= \frac{\begin{vmatrix} r_1 & b_1 & C_1 \\ r_2 & 1+b_2 & C_2 \\ r_3 & b_3 & 1+C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+a_1 & b_1 & C_1 \\ a_2 & 1+b_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & 1+C_3 \end{vmatrix}} \\
 X_d^*(S, L) &= \frac{\begin{vmatrix} 1+a_1 & r_1 & C_1 \\ a_2 & r_2 & C_2 \\ a_3 & r_3 & 1+C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+a_1 & b_1 & C_1 \\ a_2 & 1+b_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & 1+C_3 \end{vmatrix}}
 \end{aligned} \right\} (3.62)$$

$$\left[ S X_d \left( s, \frac{\varphi_2}{\omega} \right) \right]^* = \frac{\begin{vmatrix} 1+a_1 & b_1 & r_1 \\ a_2 & 1+b_2 & r_2 \\ a_3 & b_3 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+a_1 & b_1 & C_1 \\ a_2 & 1+b_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & 1+C_3 \end{vmatrix}}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= G^*(s) \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|}, & b_1 &= G^*(s, -L) \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega}+L)|}, & C_1 &= G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} \\ a_2 &= G^*(s, L) \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|}, & b_2 &= G^*(s) \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega}+L)|}, & C_2 &= G^*\left(s, L-\frac{\varphi_2}{\omega}\right) \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} \\ a_3 &= \left[ SG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|}, & b_3 &= \left[ SG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}-L\right) \right]^* \frac{M}{|x'(\frac{\pi}{\omega}+L)|}, & C_3 &= \left[ SG(s) \right]^* \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} \\ r_1 &= R_d^*(s) + \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \\ r_2 &= R_d^*(s, L) + \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} G^*\left(s, L-\frac{\varphi_2}{\omega}\right) \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \\ r_3 &= \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* + \frac{F}{|\theta_0''(\frac{\varphi_2}{\omega})|} \left[ SG(s) \right]^* \left[ SR_d\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right) \right]^* \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

そこで

$$\psi^*(s) = \begin{vmatrix} 1+a_1 & b_1 & C_1 \\ a_2 & 1+b_2 & C_2 \\ a_3 & b_3 & 1+C_3 \end{vmatrix} \quad (3.64)$$

とおけば

$$\psi^*(s) = 0 \quad (3.65)$$

なる方程式のすべての根の実数部が負であれば第3.25図に示す線形サ



サンプル値制御系は安定であり、したがってこのリレーサーボ機構の周期振動は安定であることになる。

(2.53)~(2.55) 式のパルス伝達関数の表示式を使って (3.46) 式の  $\Psi^*(s)$  に含まれる各種パルス伝達関数を計算すると次のようになる。

$$G^*(s) = \frac{Z(1-d)}{(Z-1)(Z-d)}$$

$$G^*\left(s, -\frac{\varphi_2}{\omega}\right) = \frac{1}{Z-1} - \frac{db}{Z-d}$$

$$G^*(s, -L) = \frac{1}{Z-1} - \frac{dc}{Z-d}$$

$$G^*(s, L) = \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z \cdot \bar{c}^{-1}}{Z-d}$$

$$G^*\left(s, L - \frac{\varphi_2}{\omega}\right) = \frac{1}{Z-1} - \frac{d \cdot b \cdot \bar{c}^{-1}}{Z-d}$$

$$[sG(s)]^* = -\frac{1}{T_1} \frac{Z}{Z-d}$$

$$\left[sG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega}\right)\right]^* = -\frac{1}{T_1} \frac{Z \cdot b^{-1}}{Z-d}$$

$$\left[sG\left(s, \frac{\varphi_2}{\omega} - L\right)\right]^* = -\frac{1}{T_1} \frac{b^{-1} c Z}{Z-d}$$

ただし  $d = \exp\left(-\frac{T_1}{T_i}\right)$ ,  $b = \exp\left(\frac{1}{T_1} \frac{\varphi_2}{\omega}\right)$ ,  $c = \exp\left(\frac{L}{T_1}\right)$

前章で述べたのと全く同様にしてこれらのパルス伝達関数を (3.60) 式に代入し  $Z$  について整理すると

$$A_0 Z^5 + A_1 Z^4 + A_2 Z^3 + A_3 Z^2 + A_4 Z + A_5 = 0 \quad (3.66)$$

となる。(3.66) 式であらわされる方程式の根の実数部が負であるための条件を求めるためには  $Z = \frac{Z_1 + 1}{Z_1 - 1}$  とおいてこの変換された方程式に

Hurwitz の判定法を適用すればよい。変換された方程式を

$$B_0 Z_1^5 + B_1 Z_1^4 + B_2 Z_1^3 + B_3 Z_1^2 + B_4 Z_1 + B_5 = 0 \quad (3.67)$$

とすれば  $B_0 \sim B_5$  は次のようにあらわされる。

$$B_0 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$B_1 = 5A_0 + 3A_1 + A_2 - A_3 - 3A_4 - 5A_5$$

$$B_2 = 2(5A_0 + A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + 5A_5)$$

$$B_3 = 2(5A_0 - A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - 5A_5)$$

$$B_4 = 5A_0 - 3A_1 + A_2 + A_3 - 3A_4 + 5A_5$$

$$B_5 = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5$$

そこで先に求めた自励振動または強制振動の1つを例にとつて  $B_0 \sim B_5$  の数値を求め (3.67) 式に Hurwitz の判定法を適用すれば、これらの周期振動の安定性を判定することができる。数値計算の結果、先に求めた振動は安定であることがわかる。

## 4. 結 言

本章ではクーロン摩擦とむだ時間要素のあるサーボ機構に発生する振動現象に対するクーロン摩擦の影響について検討した。むだ時間はたとえばテヨツパ増幅器、サーボモータ等の電気部分あるいはリレー制御する場合、リレーの切りかえ時のリレー接点の動作等に存在する。本章ではこの電気部分にむだ時間がある場合およびリレーの切りかえにむだ時間がある場合の2つにわけてクーロン摩擦の影響を論じた。

電気部分にむだ時間がある場合、サーボ機構に自励振動が発生するが、その自励振動のむだ時間と、クーロン摩擦の大きさによる影響を考察した。すなわち、クーロン摩擦がないときには不安定であったサーボ機構も、クーロン摩擦の存在のために安定領域をますこと明らかにした。また、発生する自励振動は不安定なものであり、系の振動は振幅が減衰してゆく安定なものか、だんだんと増大してゆく不安定なものか どれか1つで安定な自励振動は存在しないことをたしかめた。また、この系の

過渡応答を位相面を描くことにより求め、さらにクーロン摩擦の大きさが一定のとき、むだ時間の大きさ、或いは初期値の大きさにより系の動作が安定になったり、不安定になったりすることを位相面軌道を描いて検討した。また、上記の結果をアナログ計算機でたしかめた。

つぎにリレーの切りかえにむだ時間が存在する場合については系に発生する強制振動、自励振動の、むだ時間とクーロン摩擦の大きさに対する影響を検討した。サーボ機構への入力として正弦波を加えたとき、むだ時間があるためリレー出力がクーロン摩擦トルクにうちかつことができず出力速度に停滞を生ずる場合がある。この出力に停滞を生ずる限界を、入力角周波数の大きさとクーロン摩擦の大きさ、およびむだ時間の大きさの関数として求め、さらに出力速度に停滞を生ずる場合、生じない場合の各々について系に発生する基本調波振動の発生限界を求めた。

つぎに自励振動については、むだ時間のないときは第2章にのべたようにリレーが理想的な場合は自励振動を発生しないが、むだ時間のある場合はクーロン摩擦の大きさがある程度以下であるとリレーが理想的なものであつても自励振動を発生することを検討し、このむだ時間とクーロン摩擦の大きさによって定まる自励振動の発生領域を求めた。さらに自励振動の角周波数、自励振動波形を求めた。

最後にこの強制振動、自励振動の安定問題を検討し、第2章でのべたのと全く同様にしてこのサーボ機構をサンプル制御系として取扱うことにより周期振動の安定問題を取りあつかうことができること考察した。

## 第4章 リレー要素とバックラッシュ要素<sup>(26)</sup> を持つサーボ機構の振動現象

### 1. 緒言

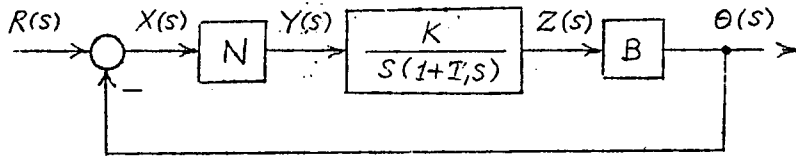
一般にサーボ機構に使用するサーボモータの出力は連結歯車を介してポテンショメータに伝達される場合が多い。連結歯車のガタ（遊び）をバックラッシュと称するが、バックラッシュがあると、もともと安定な系でも不安定になり易く、これを防ぐために1つの方法として二重歯車等<sup>(27)</sup>を使用してサーボ機構の安定化を講じている。本章では次章とともにこのバックラッシュ要素がサーボ機構におよぼす影響について考察した。

サーボ機構に含まれる非線形要素としてバックラッシュ要素のみを考え、他の非線形要素は無視できる場合のサーボ機構に発生する自励振動<sup>(28)</sup>に関してはすでに報告があるが、本章ではサーボ機構をリレー制御する場合、系に含まれるバックラッシュ要素がこのサーボ機構に発生する自励振動および強制振動に如何に影響するかを検討した。バックラッシュ要素の出力は慣性を無視して差支えない軽負荷に連結されているものとし、またリレー要素としては、リレーの切りかえにむだ時間のあるものおよびないものに大別し、その各々についてリレー特性が理想的な場合、ヒステリシスのある場合について論じた。

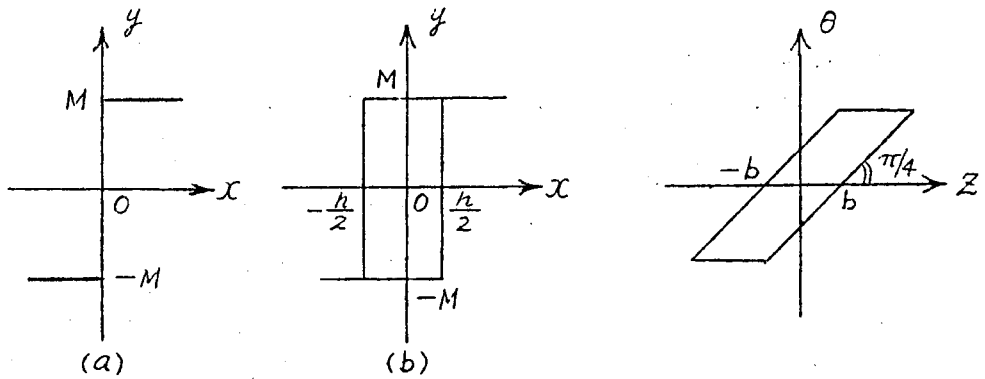
### 2. リレーの切りかえにむだ時間がない場合

#### 2.1. 基本式

いま図4.1図に示すサーボ機構において  $N$  は図4.2図(a)あるいは同図(b)に示すようなリレー特性、 $B$  は図4.3図に示すバックラッシュ特性を表わすものとする。また、 $R(s)$ 、 $X(s)$ 、 $Y(s)$ 、 $Z(s)$  および  $\theta(s)$



第4.1図 リレー要素とバックラッシュ要素のあるサーボ機構の構成図



オ4.2図 リレー特性

オ4.3図 バックラッシュ特性

はそれぞれ  $r(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  および  $\theta(t)$  のラプラス変換とする。

いま、リレー要素への入力信号  $x(t)$  が半周期  $T$  で周期的に変化するものとし、また、リレー要素の出力  $y(t)$  が負から正にきりかわる点を時間の原点にえらぶとリレー要素の出力  $y(t)$  のラプラス変換  $Y(s)$  が

$$Y(s) = \frac{M}{s} \frac{1 - \exp(-Ts)}{1 + \exp(-Ts)} \quad (4.1)$$

であらわされるから、\* サervoモータの出力位置  $z(t)$  は、 $z(t)$  のラプラス変換  $Z(s)$  が

$$Z(s) = \frac{M}{s} \frac{1 - \exp(-Ts)}{1 + \exp(-Ts)} \cdot \frac{K}{s(1+Ts)} \quad (4.2)$$

とあらわされることによりこれを逆変換して求められる。すなわち

\* オ1章 (1.6) 式参照。

$$Z(t) = KM \left[ \left( t - \frac{T}{2} \right) - T_1 \left\{ 1 - \left( 1 + \tanh \frac{T}{2T_1} \right) \exp \left( -\frac{t}{T_1} \right) \right\} \right] \quad (4.3)$$

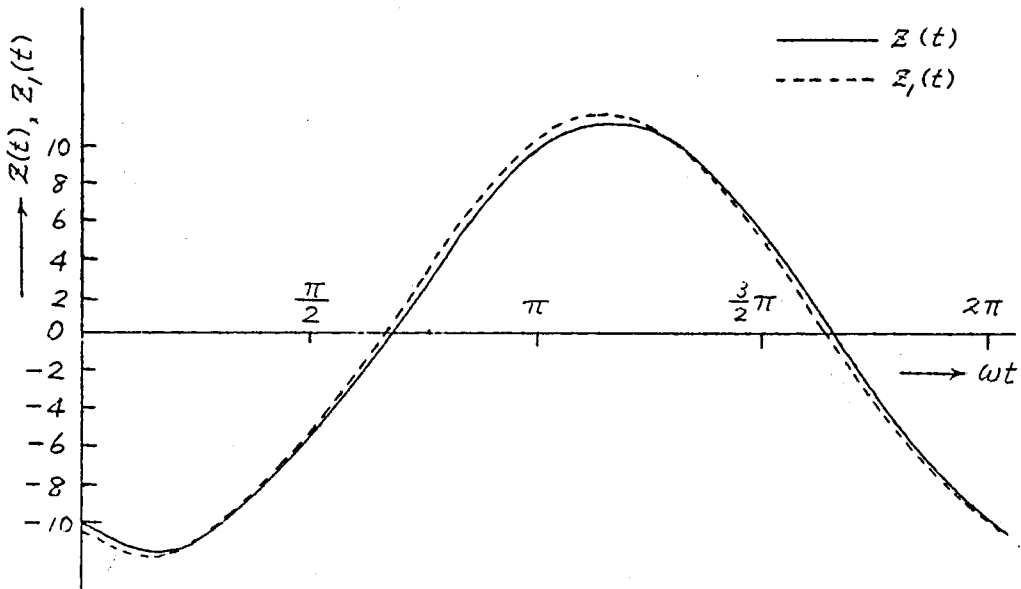
となる。(付録1.参照)

バックラッシュ要素の入力  $Z(t)$  は(4.3)式のままでは取扱いがむづかしいので、 $Z(t)$  をフーリエ級数に展開し、その基本波成分  $Z_1(t)$  をとると

$$\left. \begin{aligned} Z_1(t) &= a \sin(\omega t + \varphi) \\ \text{ただし} \quad a &= \frac{4KM}{\omega \pi \sqrt{1 + (\omega T_1)^2}} \\ \varphi &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \omega T_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

となる。

$Z(t)$  と  $Z_1(t)$  を  $KM=50$ ,  $T_1=0.1$ ,  $\omega=5$  の場合について(4.3)および(4.4)式から計算すると第4.4図に示すようになる。第4.4図からわかるようにバックラッシュ要素の入力として  $\omega$  の小さいはんい



第4.4図  $Z(t)$  と  $Z_1(t)$  の計算値 ( $KM=50$ ,  $T_1=0.1$ ,  $\omega=5$ )

では  $z(t)$  の代りに  $z_1(t)$  をとつて考えても差支えない。

(4.4) 式であらわされる  $z_1(t)$  なる入力に対し、バックラッシュの出力  $\theta(t)$  の基本波成分  $\theta_1(t)$  はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(t) &= g_1 a \sin(\omega t + \varphi) + g_2 a \cos(\omega t + \varphi) \\ \text{ただし} \\ g_1 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left( 1 - \frac{2b}{a} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right)} \right) \\ g_2 &= -\frac{4}{\pi} \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

## 2.2. 強制振動

### 2.2.1. 理想的リレー特性の場合

(4.5) 式であらわされる  $\theta_1(t)$  を以て第4.1図のサーボ機構の出力と考えると、この系に強制入力  $r = A \sin(\omega t - \phi)$  が印加されたとき、この系に角周波数  $\omega$  の振動が存在するための条件は Ya. Z. Tytkin 氏<sup>(30)</sup> のリレー制御系の理論を適用して次のようにして求めることができる。

すなわち、いま第4.1図に示す系において入力角周波数  $\omega$  と同一周波数の振動が存在するためには

$$\left. \begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= r\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - \theta_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \\ \frac{1}{\omega} \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= \frac{1}{\omega} \dot{r}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - \frac{1}{\omega} \dot{\theta}_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right) < 0 \\ x(t) &= r(t) - \theta_1(t) > 0, \quad (0 < t < \frac{\pi}{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

が成立しなければならない。

そこでいま

$$\left. \begin{aligned} J(\omega) &= -\frac{1}{\omega} \dot{\theta}_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - j \theta_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \\ F(\phi) &= \frac{1}{\omega} \dot{r}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) + j r\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

なる関数  $J(\omega)$ ,  $F(\phi)$  を導入すれば (4.6) 式の上の 2 つの条件は

$$\left. \begin{aligned} I_m \{F(\phi) + J(\omega)\} &= 0 \\ R_e \{F(\phi) + J(\omega)\} &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

となる。

(4.8) 式を図式的にとくために第 4.5 図のような作図を行なう。すなわち、複素平面上に  $J(\omega)$

の軌跡を描き、入力角周波数  $\omega$  に相当する点を  $O'$  とする。  $O'$  を中心として  $\phi$  を変化させることにより  $F(\phi)$  の軌跡を描き、実軸との交点を  $P_1$ ,

$P_2$  とすれば  $r = A \sin$

$(\omega t - \phi)$  のときは

$F(\phi) = A e^{-j\phi}$  であり、

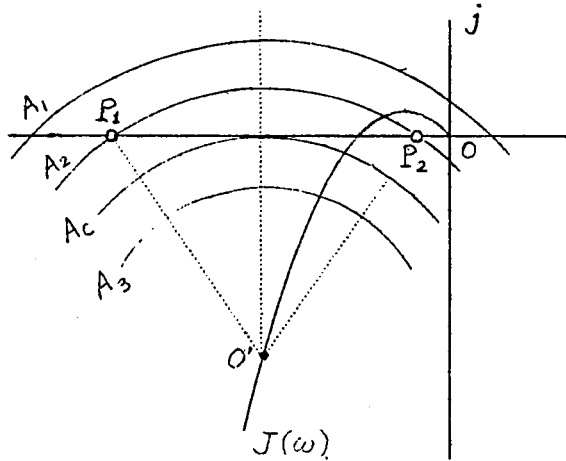
したがって  $\angle O'P_1O$  およ

び  $\angle O'P_2O$  がそれぞれ

位相おくれ  $\phi_1$  および  $\phi_2$

をあらわす。このようにして見出された  $\phi$  の値は起り得る強制振動の数を表わし、これらの強制振動は単に位相が異なるだけである。第 4.5 図に強制入力の振幅の変化によつて周期解の数が増減する様子を示した、すなわち振幅  $A = A_1$  の場合は唯一つの周期解、 $A_2$  の場合は 2 つの周期解、 $A_3$  の場合は周期解は存在しない。この場合は分数調波振動あるいは概周期振動のような複雑な振動が存在するものと考えられる。そこで  $A_c$  が  $O'$  に相当する入力角周波数  $\omega$  に対するこの系の周期解の存在限界を表わす振幅を与えることになる。

(4.5) 式より

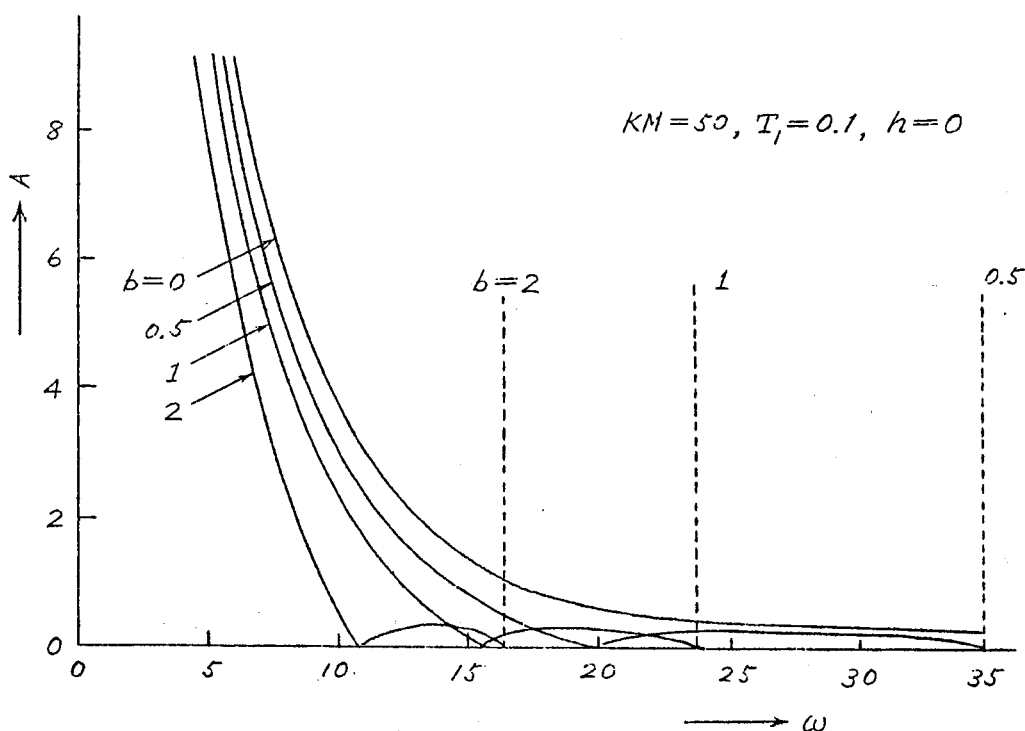


第 4.5 図 強制振動の存在範囲を求める  
図式解



$$\left. \begin{aligned} I_m J(\omega) &= a \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \sin \left( \varphi + t g_1' \frac{g_2}{g_1} \right) \\ Re J(\omega) &= a \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \cos \left( \varphi + t g_1' \frac{g_2}{g_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

であるから(4.4)式を考慮して  $J(\omega)$  を複素平面上に描き、(4.8)式で与えられる領域を強制入力の振幅  $A$ 、角周波数  $\omega$  に対し、バックラッシュの幅をパラメータにして示せば第4.6図をうる。これらの曲線の上



第4.6図 基本調波振動の発生領域 - (1)

の領域が(4.8)式を満足する。つぎにこの領域において基本調波振動の存在条件式(4.6)式の第3式を検討する。

いま、 $0 < t < \pi/\omega$  で  $x(t)$  の最小値を与える  $t$  の値を  $t_{min}$  とすれば(4.6)式の第3式は  $x(t_{min}) > 0$  となる。そこで  $x(t) = r(t) - \theta_1(t)$  を(4.5)式を考慮して  $t$  について1回微分し、零に等しいとお

いた式より  $t = t_{min}$  を求め、 $x(t_{min})$  の符号を上で求めた  $A$ ,  $\omega$  の値に対し検討すればよい。計算の結果、第4.6図の曲線の上の領域ではこの(4.6)式の第3式の条件も満足していることがわかる。

つぎに入力角周波数  $\omega$  をましていくと、(4.4)式よりわかるようにバックラッシュ要素への入力振幅  $a$  が小となり、遂に  $a$  がバックラッシュの幅より小さくなれば系の出力は生じないことになる。すなわち、バックラッシュ要素から出力があるための条件は  $a > b$  であり、 $a \leq b$  では出力を生じない。この限界を第4.6図の破線で示した。破線の右側の領域では出力を生じない。

そこで基本調波振動の発生領域は、ある一定の  $b$  に対して、曲線より上、破線より左側の領域となる。

また、第4.6図よりわかるようにバックラッシュの幅が大きくなるに従って基本調波振動の発生領域は減少し、出力を生じない領域がふえることがわかる。

曲線の下領域では概周期振動あるいは分数調波振動のような基本調波振動以外の振動が発生するが、この領域はバックラッシュの幅が大きい程減少してゆくことがわかる。

### 2.2.2. リレー特性にヒステリシスのある場合

第4.1図において  $R$  が第4.2図(b)で示されるようなヒステリシスをもつ場合、この場合の基本調波振動の発生条件としては

$$\left. \begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= r\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - \theta_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{h}{2} \\ \frac{1}{\omega} \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= \frac{1}{\omega} \dot{r}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - \frac{1}{\omega} \dot{\theta}_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right) < 0 \\ x(t) &= r(t) - \theta_1(t) > -\frac{h}{2} \quad (0 < t < \frac{\pi}{\omega}) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

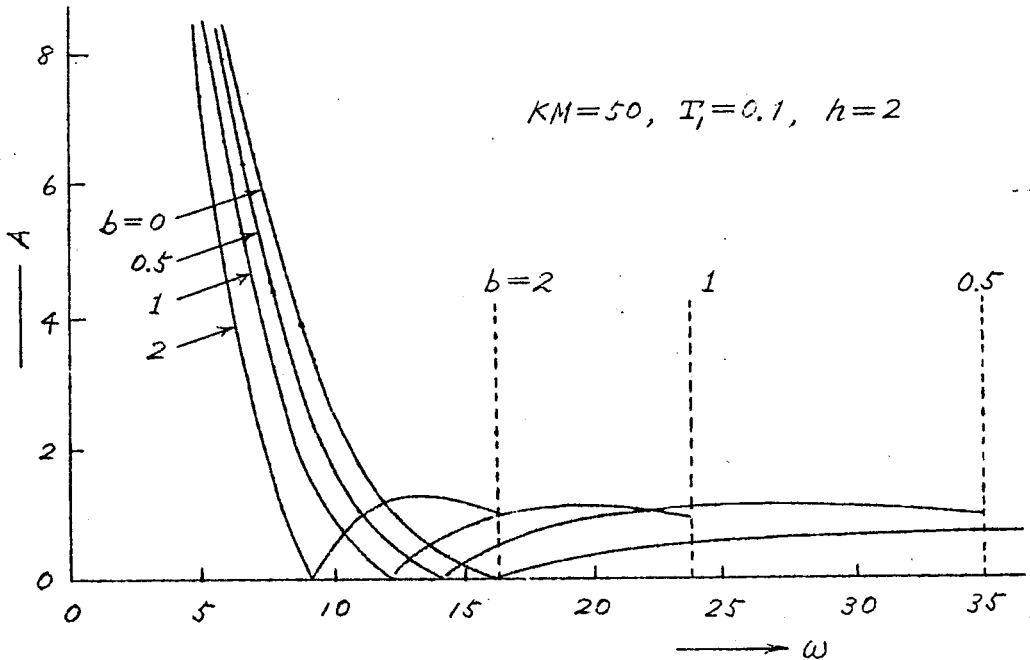
となり、はじめの2式の条件式は

$$\left. I_m \left\{ F(\phi) + J(\omega) \right\} = -\frac{h}{2} \right\} \quad (4.11)$$

$$\operatorname{Re}\{F(\phi)+J(\omega)\} < 0 \quad \}$$

となる。

(4.11)式は前と全く同様にして図式的にとくことができる。ただしこの場合には複素平面上  $F(\phi)$  の軌跡と  $-h/2$  なる半直線の交点を検討して(4.11)式を満足する領域を求めなければならない。前と全く同様にして  $J(\omega)$  を計算し、(4.10)式の第3式の条件を検討して基本調波振動の存在領域を、強制入力の振幅  $A$ 、角周波数  $\omega$  に対し、バックラッシュの幅をパラメータにして示せばリレーのヒステリシスの幅  $h=2$  の場合、第4.7図を得る。図で破線は第4.6図と同様、出力の発生限界を示すも



第4.7図 基本調波振動の発生領域-(2)

ので、それぞれの破線の右側ではバックラッシュ要素への入力の振幅がバックラッシュの幅より小さくなって出力が存在しない。すなわち曲線の上側、破線の左側で基本調波振動が発生し、曲線の下側では分数調波振動のような基本調波振動以外の振動が発生する。

### 2.3. 自励振動

第4.1図の系の自励振動の発生条件は(4.6)式あるいは(4.10)式において  $r(t)=0$ ,  $\dot{r}(t)=0$  とすればよい。そこで自励振動の発生条件として

(i) リレーが理想的な場合

$$\text{Im } J(\omega) = 0, \text{Re } J(\omega) < 0, \theta_1(t) < 0 \quad (0 < t < \pi/\omega)$$

(ii) リレーがヒステリシスをもつ場合

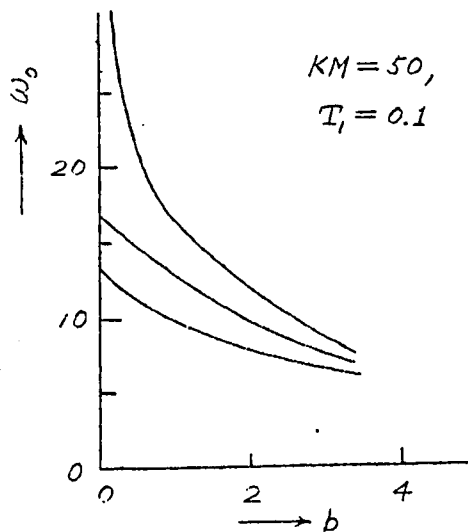
$$\text{Im } J(\omega) = -\frac{h}{2}, \text{Re } J(\omega) < 0, \theta_1(t) < \frac{h}{2} \quad (0 < t < \pi/\omega)$$

となる。

前と全く同様に複素平面上に  $J(\omega)$  の軌跡を描き, (i) の場合は負の実軸, (ii) の場合は  $-\frac{h}{2}$  なる半直線との交点における  $\omega$  が自励振動の角周波数を与える。

いま, 自励振動角周波数  $\omega$  とバックラッシュの幅との関係を, リレーのヒステリシスの幅をパラメータにして示せばオ4.8図の曲線を得る。

$h=0$  すなわちリレー特性が理想的な場合, もしバックラッシュがなければ自励振動を発生しないが, バックラッシュがわずかでもあると自励振動を発生することがわかる。一般に自励振動角周波数はバックラッシュの幅が大きくなるにつれて小さい値をとる。これからわかるようにバックラッシュの存在はリレーのヒステリシスの幅をひろげる働きをすることがわかる。



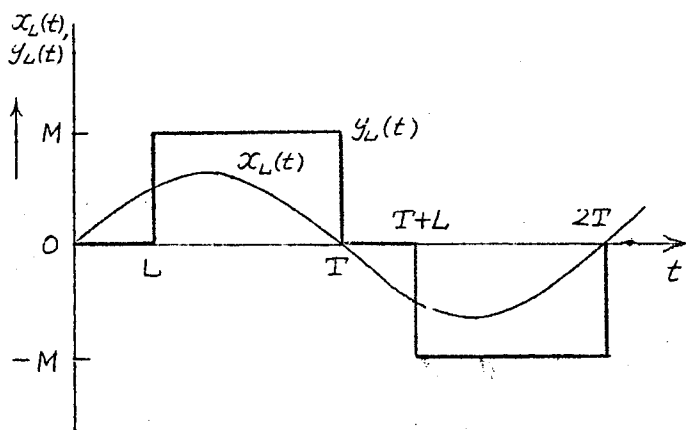
オ4.8図 自励振動角周波数

### 3. リレーの切りかえにむだ時間がある場合

#### 3.1. 基本式

前節にはリレーのきりかえにむだ時間がない場合を論じたが、この節ではリレーのきりかえにむだ時間がある場合について系に発生する強制振動および自励振動について論ずる。

いま、第4.1図に示すサーボ機構において  $N$  は第4.2図 a), b) に示すリレー特性であるが、極性をきりかえるときむだ時間  $L$  が存在するものとする。すなわち、リレーが負から正にきりかわるときを以つて時間の原点とするとこの場合のリレー出力  $y_L(t)$  の波形は第4.10図に示すようになる。



第4.10図 リレーの切りかえにむだ時間  
のあるときのリレーの入出力波形

周期的に変化する  $y_L(t)$  をラプラス変換すると

$$Y_L(s) = \frac{M}{s} \frac{1 - \exp(-\overline{T-L})s}{1 + \exp(-Ts)} \exp(-Ls) \quad (4.12)$$

となるから線形部の出力  $z_L(t)$  は  $T = \pi/\omega$  として

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_L(t)}{KM} &= -\frac{1}{2}(T-L) + T_i \left\{ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T-L}{T_i}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{T_i}\right)} \right\} \exp\left(-\frac{t}{T_i}\right) \\ &\quad 0 \leq t \leq L \\ \frac{z_L(t)}{KM} &= \left(t - L - \frac{T-L}{2}\right) - T_i \left\{ 1 - \frac{1 + \exp\left(-\frac{L}{T_i}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{T_i}\right)} \exp\left(-\frac{t-L}{T_i}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$L \leq t \leq T$$

となる。

前節で述べたのと全く同様にして  $Z_L(t)$  をフーリエ級数に展開し、その基本波成分  $Z_{1L}(t)$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} Z_{1L}(t) &= a_L \sin(\omega t + \varphi_L) \\ \text{ただし} \quad a_L &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\omega L}}{\pi\omega\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} MK \\ \varphi_L &= -\frac{\pi}{2} - t_2^{-1} \frac{\omega T_1(1+\cos\omega L) + \sin\omega L}{(1+\cos\omega L) - \omega T_1 \sin\omega L} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

となる。

前節と同様にバックラッシュ要素の入力として  $Z_L(t)$  の代りに  $Z_{1L}(t)$  をとって考えると (4.14) 式であらわされる  $Z_{1L}(t)$  なる入力に対し、バックラッシュ要素の出力  $\theta_L(t)$  の基本波成分  $\theta_{1L}(t)$  は

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1L}(t) &= g_{1L} a_L \sin(\omega t + \varphi_L) + g_{2L} a_L \cos(\omega t + \varphi_L) \\ \text{ただし} \quad g_{1L} &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left( 1 - \frac{2b}{a_L} \right) \right) + 2 \left( 1 - \frac{2b}{a_L} \right) \sqrt{\frac{b}{a_L} \left( 1 - \frac{b}{a_L} \right)} \\ g_{2L} &= -\frac{4}{\pi} \frac{b}{a_L} \left( 1 - \frac{b}{a_L} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

となる。

### 3.2 強制振動

#### 3.2.1. 理想的リレー特性の場合

(4.15) 式であらわされる  $\theta_{1L}(t)$  を以ってむだ時間が存在するリレー要素を持つサーボ機構の出力と考えると、この系に強制入力

$$r(t) = A \sin(\omega t - \phi)$$

が印加されたとき、この系に角周波数  $\omega$  の振動が存在するための条件は、前節と全く同様に

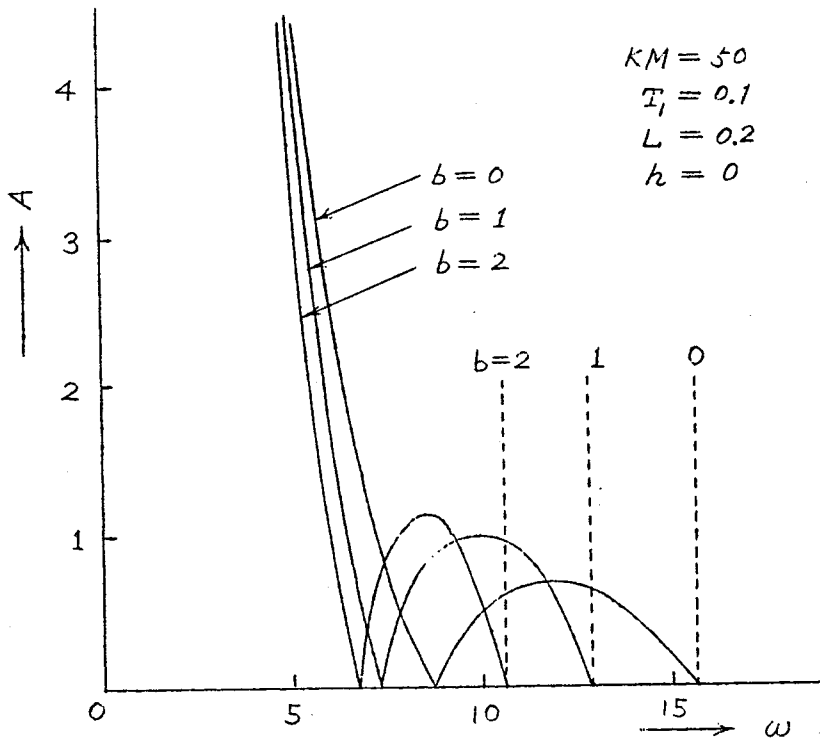
$$\left. \begin{aligned} I_m \{F(\phi) + J_L(\omega)\} &= 0 \\ Re \{F(\phi) + J_L(\omega)\} &> 0 \\ r(t) - \theta_{IL}(t) &> 0, \quad 0 < t < \pi/\omega \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} F(\phi) &= A e^{-j\phi} \\ I_m J_L(\omega) &= a_L \sqrt{g_{1L}^2 + g_{2L}^2} \sin\left(\varphi_L + t g^{-1} \frac{g_{2L}}{g_{1L}}\right) \\ Re J_L(\omega) &= a_L \sqrt{g_{1L}^2 + g_{2L}^2} \cos\left(\varphi_L + t g^{-1} \frac{g_{2L}}{g_{1L}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

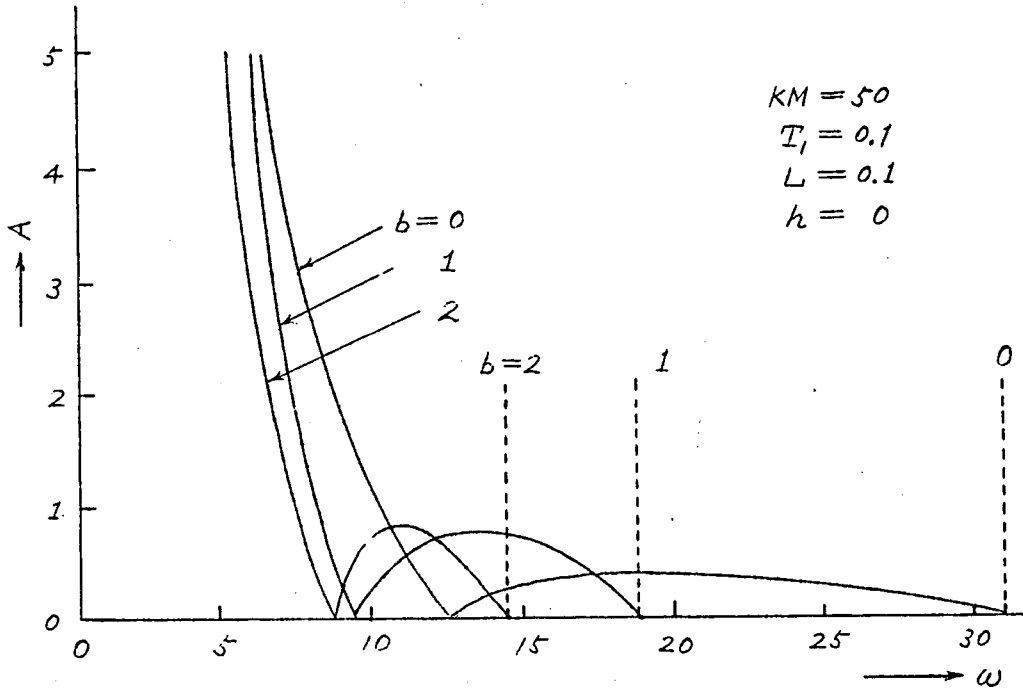
である。

そこで(4.14)式を考慮して(4.16)式のはじめの2式を(4.17)式を



第4.11図 基本調波振動の発生領域(1)  
(リレーの切りかえにむだ時間のある場合)

決つて複素平面上に描き、基本調波振動の存在領域を強制入力の振幅 $A$ 、入力角周波数 $\omega$ に対し、バックラッシュの幅 $b$ をパラメータにして示せば、むだ時間 $L=0.2$ 秒の場合を才4.11図に、 $L=0.1$ 秒を才4.12図に示した。ただし $KM=50$ 、 $T_f=0.1$ とした。これらの曲線の上の領



第4.12図 基本調波振動の発生領域(2)

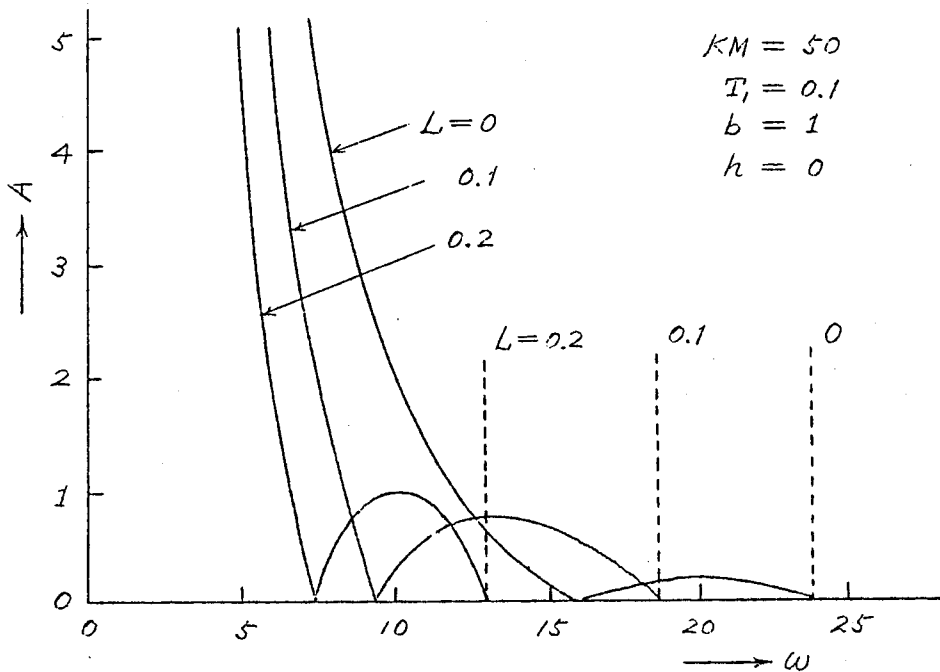
(リレーの切りかえにむだ時間のある場合)

域では(4.16)式の才3式も満足し、この領域で基本調波振動を発生する。なお同図で破線はバックラッシュの入力振幅がバックラッシュの幅より小さくなり、出力を生じない限界を示すものである。破線より右側は、系に出力を生じない領域である。なお、バックラッシュのない場合、すなわち $b=0$ の場合の破線は $L=\frac{\pi}{\omega}$ で与えられる $\omega$ を示すものであって、この破線より右側では $L>\frac{\pi}{\omega}$ となりこのような場合はリレーのむだ時間 $L$ が振動の半周期 $\frac{\pi}{\omega}$ よりも大となることになり不合理なので考えないことにする。



いづれにしても基本調波振動の発生領域は曲線の上，破線の左側の領域となる。曲線の下側では概周期振動あるいは分数調波振動のような基本調波振動以外の振動が発生し，破線より右側では系は出力を生じない。

第4.11図および第4.12図をむだ時間のない場合の第4.6図と比較するとリレーのきりかえにむだ時間がある場合は，ない場合に比していちじるしく異なったものとなることがわかる。このむだ時間の影響をみるために，バックラッシュの幅を一定にしてむだ時間をかえて基本調波振動の発生する領域を描けば第4.13図を得る。図中破線は前にも述べ



第4.13図 基本調波振動発生領域とむだ時間の関係

たように出力を生じない限界をあらわす。第4.13図からわかるようにむだ時間がふえれば基本調波振動の発生領域が減少することがわかる。

### 3.2.2. リレー特性にヒステリシスがある場合

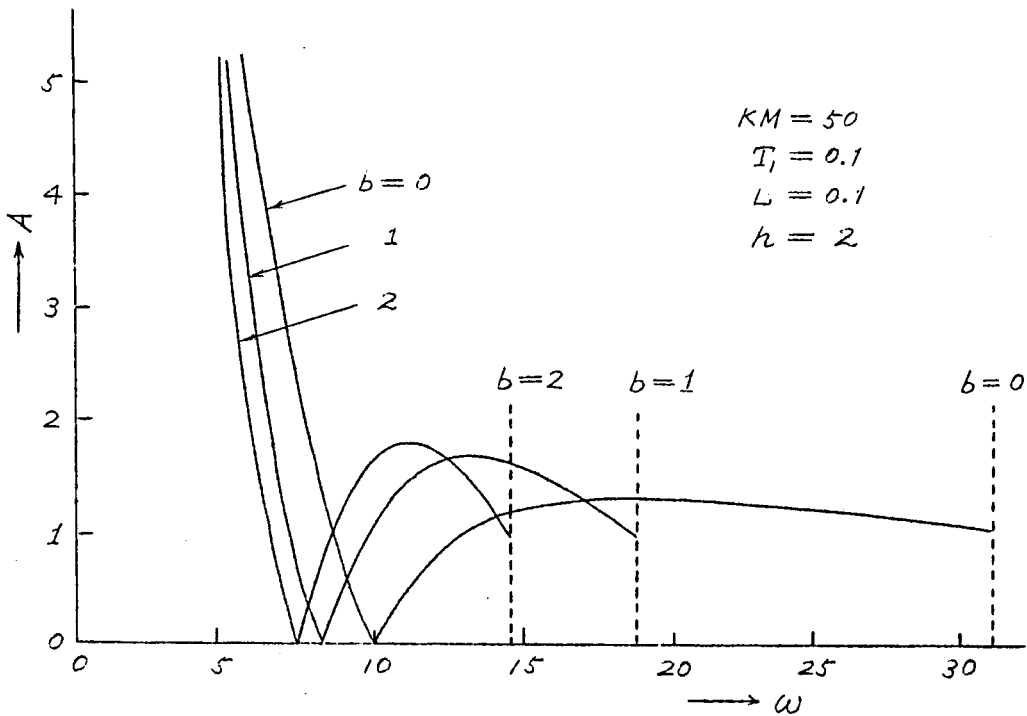
リレーが第4.2図(b)のような特性をもち且つリレーのきりかえにむ

だ時間のある場合の基本調波振動の発生領域を求める。

基本調波振動の発生条件としては前節と同様に

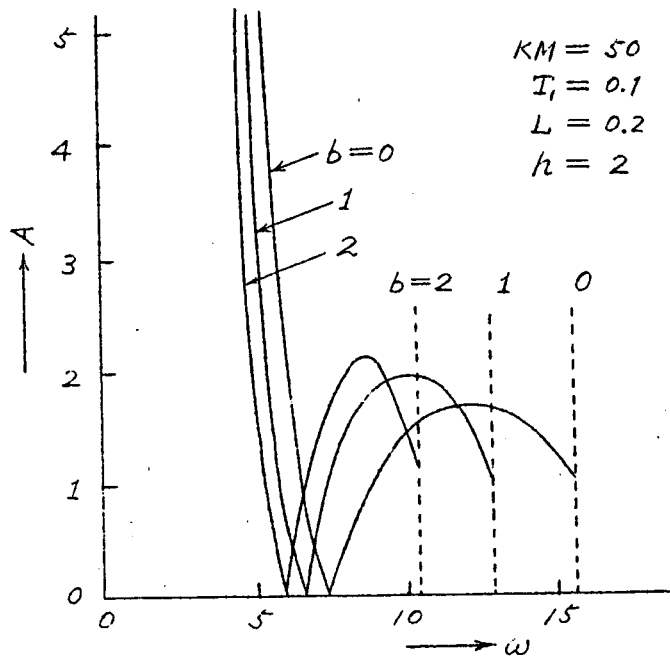
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \{F(\phi) + J_L(\omega)\} &= -\frac{h}{2} \\ \operatorname{Re} \{F(\phi) + J_L(\omega)\} &< 0 \\ r(t) - \theta_{IL}(t) &> -\frac{h}{2}, \quad 0 < t < \pi/\omega \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

となる。(4.17)式を考慮して  $J_L(\omega)$  を複素平面上に描き、基本調波振動の発生領域を求め、(4.18)式のオ3式を考慮すれば  $L=0.1$ ,  $L=0.2$  の場合について第4.14図および第4.15図に示すようになる。図中破線は出力を生ずる限界を示す。すなわち曲線の上側、破線の左側の領域で基本調波振動が発生する。曲線の下側では概周期振動あるいは分数調

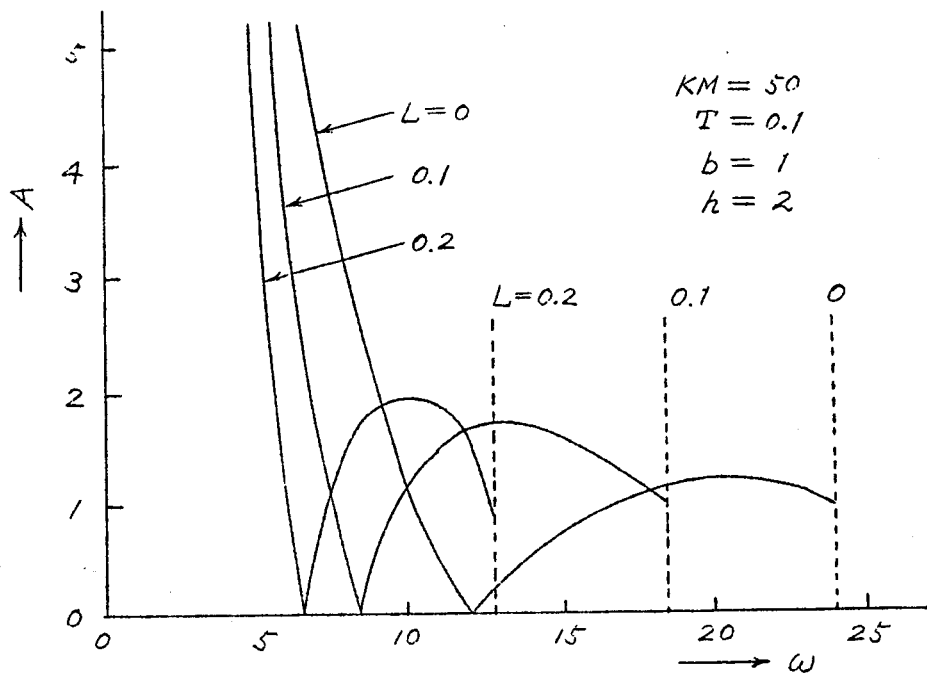


第4.14図 基本調波振動の発生領域(1)

(リレーにヒステリシスとむだ時間のある場合)



第4.15図 基本調波振動の発生領域 (2)



第4.16図 基本調波振動の発生領域とむだ時間の関係  
(リレーにヒステリシスとむだ時間がある場合)

波振動のような複雑な振動を発生し、破線の右側では出力を生じない。バックラッシュの幅を一定とし、基本調波振動発生領域に対するむだ時間の影響をみれば第4.16図を得る。

### 3.3. 自励振動

この場合も前節に述べたのと全く同様に自励振動を論ずることができる。すなわち自励振動の発生条件として

i) 理想的リレー特性の場合

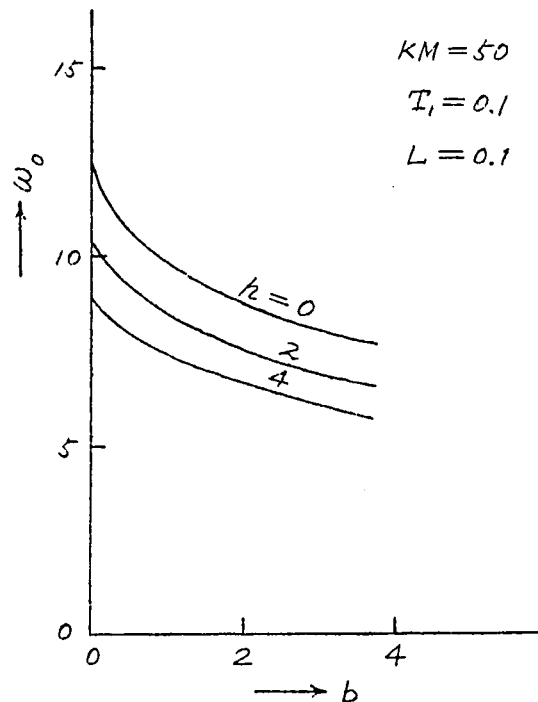
$$\operatorname{Im} J_L(\omega) = 0, \operatorname{Re} J_L(\omega) < 0, \theta_L(t) < 0 \quad (0 < t < \pi/\omega)$$

ii) リレー特性にヒステリシスのある場合

$$\operatorname{Im} J_L(\omega) = -\frac{h}{2}, \operatorname{Re} J_L(\omega) < 0, \theta_L(t) < \frac{h}{2} \quad (0 < t < \pi/\omega)$$

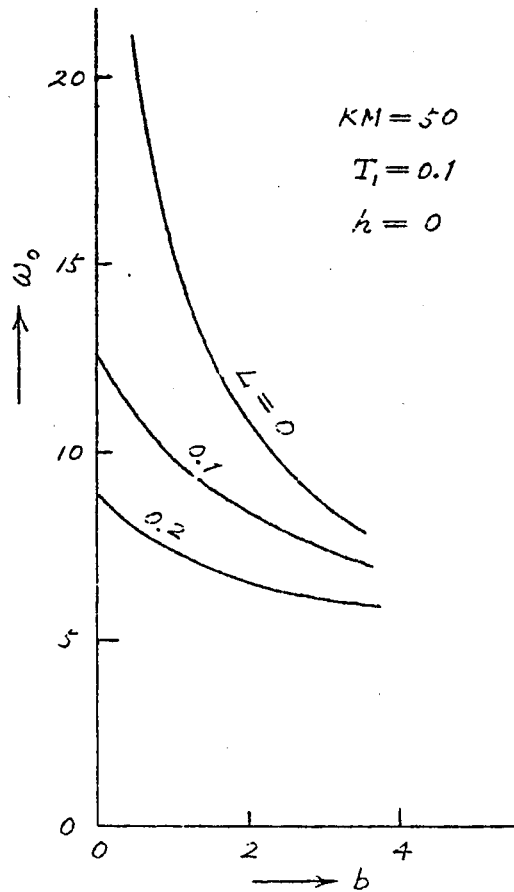
となるから、前節と全く同様にして自励振動角周波数を求めることができる。いまこの自励振動角周波数 $\omega_0$ と、バックラッシュの幅 $b$ との関係を $L$ 一定で $h$ をかえた場合、 $h$ 一定で $L$ をかえた場合について示せば夫々第4.17図、および第4.18図を得る。

これらの図からわかるようにリレーにむだ時間があればたとえリレーが理想的なものであっても系に自励振動が発生する。むだ時間がある一定値をとるとき、リレーのヒステリシスの幅



第4.17図 自励振動角周波数  
(むだ時間：一定)

んが大きくなるほど一定のバックラッシュの値に対しては自励振動角周波数  $\omega_0$  は減少する。またリレーのヒステリシスの幅  $b$  が一定値をとるとき、むだ時間  $L$  が大きくなるほど一定のバックラッシュの値に対しては自励振動角周波数は減少する。いずれの場合にもバックラッシュの幅  $b$  が大きくなるほど自励振動角周波数は減少することがわかる。



#### 4. 周期振動の安定問題

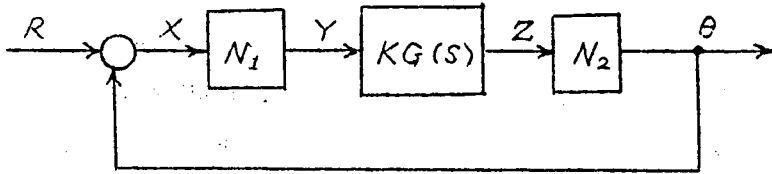
本節では第2節および第3節で論じた振動の安定性を論ずる。この場合第2章第3節で論じたような Ya. Z. Tytkin 氏のリレー制御系の安定理論

第4.18図 自励振動角周波数(リレーのヒステリシスの幅：一定)

を適用すると、第4.1図であらわされる制御系の安定問題は結局バックラッシュ要素をもつサンプル値制御系の安定問題を取扱うことに帰着する。しかしこのようなサンプル値制御系の安定問題を正確に論じることが非常に困難であるので、ここでは *describing function* の方法<sup>(30)</sup>を適用して第4.1図であらわされる制御系の自励振動の安定問題について論ずる。簡単のためにリレー特性は理想的なものとし、さりかえにむだ時間がある場合、ない場合について考察する。リレー特性にヒステリシスのある場合も全く同様にして安定問題を論ずることができる。

#### 4.1. リレーのきりかえにむだ時間のない場合

リレー特性が理想的なものとし、その describing function を  $N_1$ 、バックラッシュのそれを  $N_2$  として第4.1図をかきかえると第4.19図を得る。ただし  $G(s) = \frac{1}{s(1+T_1s)}$  である。



第4.19図 describing fn. でおきかえた構成図

いま、系が角周波数  $\omega$  で自励振動をしていると仮定し、 $Z(t) = a \sin \omega t$  とすれば、バックラッシュ出力の基本波  $\theta_1(t)$  は

$$\theta_1(t) = a \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \sin\left(\omega t + \tan^{-1} \frac{g_2}{g_1}\right)$$

となるのでバックラッシュの describing function  $N_2$  は

$$N_2 = g_1 + jg_2 \quad (4.19)$$

となる。またリレー要素の describing function  $N_1$  は、この要素の入力振幅が  $a\sqrt{g_1^2 + g_2^2}$  であるので

$$N_1 = \frac{4M}{\pi a \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (4.20)$$

となる。そこで  $N_1, N_2$  を一つにまとめて  $N_1 N_2 = N_0$  とすれば

$$N_0 = \frac{4M}{\pi a} \angle \tan^{-1} \frac{g_2}{g_1} \quad (4.21)$$

とかくことができる。ここで  $g_1, g_2$  は(4.5)式で与えられるように  $a$  の関数であるので  $N_0$  は自励振動の振幅  $a$  の関数となる。

いま、第4.19図の特性方程式は

$$KG(s) N_0(a) + 1 = 0$$

となるので、この系が角周波数  $\omega$  で自励振動をしているとすれば、その  $\omega$ 、および自励振動の振幅  $a$  は

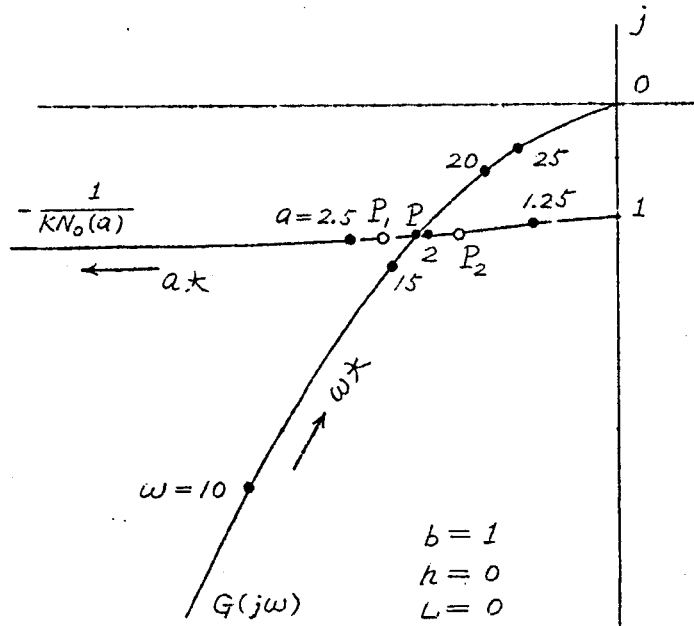
$$KG(j\omega) = -\frac{1}{N_0(a)} \quad (4.22)$$

又は  $G(j\omega) = -\frac{1}{KN_0(a)} \quad (4.22')$

を満足する。

(4.22)式又は(4.22')式の左辺は $\omega$ の関数であり、右辺は $a$ の関数であるのでこれらを別々に複素平面上に描けばその交点が自励振動角周波数 $\omega$ および振幅 $a$ を与え、さらにその $\omega, a$ なる振動の安定性を論ずることができる。

たとえば  $b=1, KM=50, T_f=0.1$  として(4.22')式を複素平面上に描けば第4.20図を得る。この場合、交点は唯1個あり、交点 $P$ での



第4.20図 (4.22')式の複素平面表示

$\omega = 15.8, a = 2.15$  となり、夫々自励振動角周波数および振幅を与える。これは第4.8図で与えられる自励振動角周波数 $\omega_0$ およびそれから(4.4)式を使って計算した $a$ の値に一致する。

さて、第4.20図において交点 $P$ より大きい $\omega$ では $G(j\omega)$ の軌跡は $-1/N_0(a)$ の軌跡を囲んでいるから、この範囲の $-1/N_0(a)$ で与えられる $a$ は不安定である。また逆に交点 $P$ より大きい $a$ の範囲は安定である。そこでいま $P$ 点で自励振動している状態が外乱によって振幅 $a$ が $a+\Delta a$  ( $\Delta a > 0$ ) と変化し、 $P$ 点が $P_1$ 点に変化したとすると、この点は安定であるから振動は次第に減衰する。また逆に振幅 $a$ が減少して $P_2$ 点にきたとすると、ここでは不安定であるから振動は次第に増大し、結局 $P$ 点におちつき自励振動をすることになる。したがって $P$ 点では安定な自励振動を発生する。

バックラッシュの幅 $b$ をかえても同様な軌跡を得、結局第2節で論じたりレーのきりかえにむだ時間のない場合の自励振動は安定であることがわかる。

#### 4.2. リレーのきりかえにむだ時間がある場合

簡単のためリレー特性は理想的なものとし、リレーのきりかえにむだ時間がある場合の系に発生する自励振動の安定性を論ずる。

第4.1節で論じたと同様に第4.19図において $z(t) = a \sin \omega t$  と仮定すれば

$$\theta_{1L}(t) = a \sqrt{g_{1L}^2 + g_{2L}^2} \sin \left( \omega t + t g^{-1} \frac{g_{2L}}{g_{1L}} \right)$$

となるので、バックラッシュの describing function  $N_{2L}$  は

$$N_{2L} = g_{1L} + j g_{2L} \quad (4.23)$$

となる。ただし $g_{1L}$ ,  $g_{2L}$ は(4.15)式で与えられる。

また、むだ時間のあるリレー要素の describing function はリレー要素への入力振幅が $a \sqrt{g_{1L}^2 + g_{2L}^2}$  であるので

$$N_{1L} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{MK \sqrt{1 + \cos \omega L}}{a \sqrt{g_{1L}^2 + g_{2L}^2}} \angle t g^{-1} \frac{-\sin \omega L}{1 + \cos \omega L} \quad (4.24)$$

となる。

故に  $N_{0L} = N_{1L} \cdot N_{2L}$  とすれば



$$N_{OL} = \frac{2\sqrt{2}MK\sqrt{1+\cos\omega L}}{\pi a} \left[ t_9^{-1} \frac{\beta_{2L}}{\beta_{1L}} + t_9^{-1} \frac{-\sin\omega L}{1+\cos\omega L} \right] \quad (4.25)$$

とかくことができる。(4.25)式からわかるように  $N_0$  は自励振動の振幅  $a$  の関数とともに自励振動角周波数  $\omega$  の関数でもある。そこでいまむだ時間のあるリレー要素をもつ第4.19図で示される系の特性方程式

$$KG(s)N_{OL}(a, \omega) + 1 = 0$$

より、この系が角周波数  $\omega$  で自励振動をしているとすれば、その  $\omega$ 、および振幅  $a$  は

$$KG(j\omega) = -\frac{1}{N_{OL}(a, \omega)} \quad (4.26)$$

$$\text{すは} \quad G(j\omega) = -\frac{1}{KN_{OL}(a, \omega)} \quad (4.26')$$

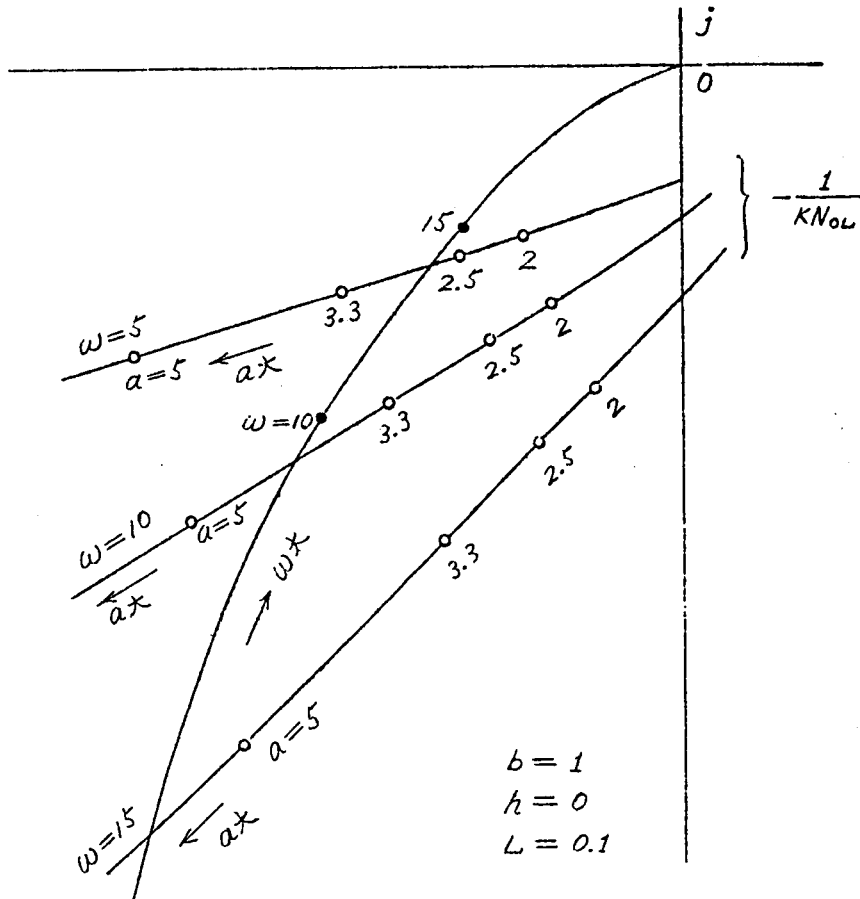
を満足する。

(4.26')式の右辺は  $\omega$  および  $a$  の関数であるので(4.26')式を満足する  $a$ 、 $\omega$  を求めるために、複素平面上に  $\omega$  をパラメータとした  $-1/KN_{OL}(a, \omega)$  の曲線を多数  $a$  について描く。この  $\omega$  をパラメータとする振幅軌跡群と(4.26')式の右辺で与えられる周波数軌跡の交点において、周波数軌跡を与える  $\omega$  と振幅軌跡を与えるパラメータ  $\omega$  が同じ値をとるとき系はその交点における  $\omega$ 、 $a$  で以って自励振動をする。

1例として  $b=1$ 、 $KM=50$ 、 $T_1=0.1$ 、 $L=0.1$  とし、(4.25)式を用いて(4.26')式を複素平面上に描けば第4.21図を得る。同図より  $\omega=9.6$  の振幅軌跡と  $G(j\omega)$  の周波数軌跡の交点で系は自励振動をする。

第4.1節で論じたのと全く同じ手法でこの交点における自励振動の安定性を論ずることができる。すなわち、この場合安定な自励振動をすることがわかる。バックラッシュの幅  $b$  をかえても同様な軌跡を得、結局第3節で論じたりレーのきりかえにむだ時間のある場合の自励振動は安定であることがわかる。

以上第4.1節および第4.2節ではリレーにヒステリシスがない場合を



第4.21図 (4.26') 式の複素平面表示

論じたが、ヒステリシスのある場合も同様な考察をすればこの自励振動も安定であることがわかる。

## 5. 結 言

本章ではサーボ機構をリレー制御する場合、系に含まれているバックラッシュ要素がこのサーボ機構に発生する自励振動および強制振動に如何に影響するかを検討した。バックラッシュ要素の出力は慣性を無視できる軽い負荷に連結されているとし、またリレー要素として、リレーの切りかえにむだ時間のあるものおよびないものに大別し、その各々につ

いてリレー特性が理想的な場合、ヒステリシスのある場合について論じた。

バックラッシュ要素は、入力をフーリエ級数に展開してその基本波成分を取り、これをバックラッシュ要素の入力としたとき、その出力の基本波と比較することにより *describing function* をとってこれを線形化し、Ya. Z. Tsypkin 氏のリレー制御系の理論を適用し、系に強制入力を印加した場合の基本調波振動の発生領域を求めた。さらに自励振動の角周波数、振幅の、バックラッシュの幅、むだ時間、リレーのヒステリシスの幅に対する関係を検討した。また *describing function* を用いて複素平面上に振幅軌跡、周波数軌跡を描くことにより自励振動の安定性を考察し、このような系に発生する自励振動は安定であることをたしかめた。

## 第5章 クーロン摩擦とバックラッシュ要素を持つサーボ機構の振動現象

### 1. 緒 言

前章においては、リレー要素がバックラッシュ要素のあるサーボ機構の振動現象におよぼす影響について論じたが、本章では、クーロン摩擦がバックラッシュ要素のあるサーボ機構の振動現象におよぼす影響について考察する。

バックラッシュはモータのトルクを負荷に伝える連結歯車に存在するのであるが、もしモータによって駆動されている負荷が、サーボ計算器の位置検出用ポテンショメータの接触子のようにその慣性および摩擦を無視しても差支えない場合には前章に述べたように単なる位置のヒステリシス特性と考えると差支えないが、負荷の慣性および摩擦を無視できない場合には、バックラッシュを上の場合のように単に位置のヒステリシス特性として静的に取扱うことはできない。

負荷の慣性が無視できない場合には、後述するようにモータと負荷の2つの力学系の運動を考慮する必要があり、このような場合については線形摩擦のみを取扱い、線形摩擦とバックラッシュの系の安定性に対する影響を論じたもの<sup>(31)~(33)</sup>、あるいは線形摩擦を無視してクーロン摩擦とバックラッシュの *describing function* を求めて系の安定性を論じたもの<sup>(34)</sup>の等の報告があるが、非線形摩擦とバックラッシュが共存する場合の系の動作を正確に解析した例はない。

また負荷の慣性を無視して差支えない場合についても、モータの回転角をフィードバックしたサーボ機構において、非線形摩擦がモータ軸あるいは負荷軸のいずれか一方に存在するとした比較的簡単な場合の過渡応答の解析があるにすぎない。<sup>(35)</sup>

本章では負荷の慣性を無視できない場合、および無視して差支えない

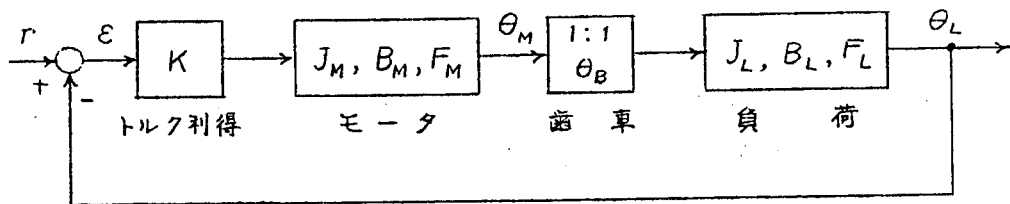
場合の各々について、バックラッシュとクーロン摩擦が存在する場合、このサーボ機構に発生する自励振動を解析し、これからサーボ機構の安定性に対するバックラッシュとクーロン摩擦の影響について考察した。

## 2. 負荷の慣性を考慮した場合の自励振動<sup>(36)</sup>

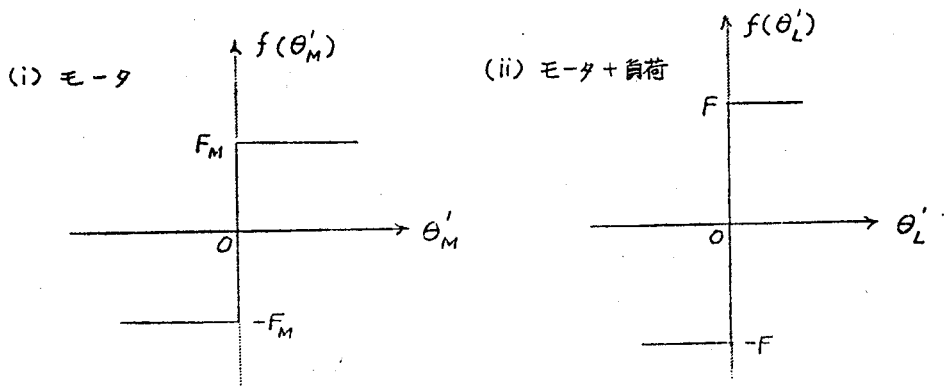
この節ではさきにのべたように、負荷の慣性および摩擦が無視できない場合、連結歯車のバックラッシュと、モータ軸および負荷軸のクーロン摩擦を考慮して、サーボ機構に発生する自励振動を、位相面を用いて解析し、その動作に対するバックラッシュとクーロン摩擦の影響について論じる。

### 2.1. サーボ機構の構成

いま第 5.1 図に示されるようなサーボ機構を考える。



第 5.1 図 サーボ機構の構成図



第 5.2 図 クーロン摩擦特性

すなわちモータと負荷は歯車によって連結され、歯車には角度  $\theta_B$  なるバックラッシュが存在するものとする。なお簡単のために歯車比は 1:1 であるとする。

またモータおよび負荷はそれぞれ慣性モーメント  $J_M, J_L$ ; 粘性摩擦係数  $B_M, B_L$ ; クーロン摩擦トルク  $F_M, F_L$  をもっているものとする。このモータおよびモータと負荷が結合した場合のクーロン摩擦トルクの特性を第 5.2 図に示す。ただし  $F = F_M + F_L$  である。

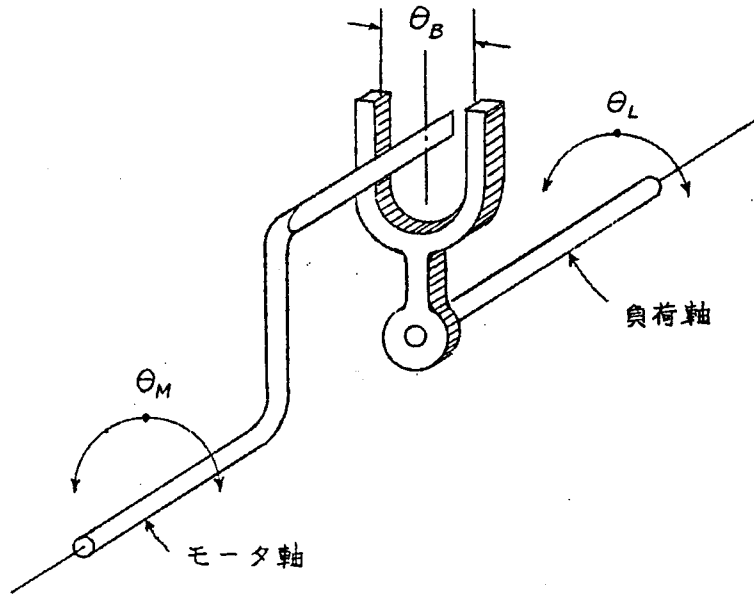
さらに負荷の回転角  $\theta_L$  がポテンシオメータによって検出され、これが入力側にフィードバックされて制御されているものとする。バックラッシュによるサーボ機構の不安定化をさけ、過渡応答の速応化を望むために、実際にはモータの回転角  $\theta_M$  をフィードバックして負荷の回転角を制御する場合もあるが、このようにすると、モータ軸のクーロン摩擦にもとづく負荷の回転角の定常誤差のほかに連結歯車のバックラッシュにもとづく負荷の回転角の定常誤差を許容しなければならない。したがってバックラッシュにもとづく誤差が許容されない場合には、サーボ機構の構成は第 5.1 図のようになる。

このようなサーボ機構においてモータがある方向に回転すると、歯車のバックラッシュのためにトルクはある区間負荷に伝達されず、この区間では負荷は停止してモータのみが回転する。歯車が結合されると初めて負荷はモータと一体になって回転する。つぎにモータが逆回転すると、負荷はバックラッシュの角度  $\theta_B$  だけ逆回転することができない。

このようなサーボ機構の運動は、モータが負荷と離れて運動する場合（以下分離時あるいは分離域という）と、負荷と結合して運動する場合（結合時あるいは結合域という）とに分けて論ずることができる。したがって以下の解析はこのような考え方のもとに、上の二種の状態をとる力学系として考察することにする。

## 2.2. 基本式

第 5.1 図に示すサーボ機構において、モータおよび負荷が設定値を示



第5.3図 モータと負荷の間に存在するバックラッシュ

して静止状態にあるものとし、また第5.3図に示すように、負荷軸がバックラッシュの角度  $\theta_B$  の中央にある状態を、モータおよび負荷の回転角の基準にとるものとする。いま入力に変化することなく、しかも何らかの外乱によってモータ軸および負荷軸が正負いずれかの方向に階段状に変化したときのこのサーボ機構の動作をあらわす基本式をみちびく。

### 2.2.1 分離域における基本式

いま、モータおよび負荷の平衡状態からの回転角を  $\theta_M(t)$ ,  $\theta_L(t)$  とし、分離のはじまる時点でのモータおよび負荷の回転角を  $\theta_{M0}$ ,  $\theta_{L0}$  とすると、分離域においては負荷は停止しているから、誤差信号  $\varepsilon(t)$  は一定で、

$$\varepsilon = -\theta_{L0} \quad (5.1)$$

であり、この領域でのモータの運動方程式は、 $\theta_{L0} \geq 0$  に伴って  $\dot{\theta}_M \leq 0$  となることより、

$$J_M \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + B_M \frac{d\theta_M}{dt} = \mp \{ K |\theta_{Lo}| - F_M \} , \quad \theta_{Lo} \geq 0 \quad (5.2)$$

となる。そこで、

$$\left. \begin{aligned} 2\zeta \omega_o &= \frac{B_M + B_L}{J_M + J_L} = \frac{(1+n)B_M}{(1+m)J_M} \\ \omega_o^2 &= \frac{K}{J_M + J_L} = \frac{K}{(1+m)J_M} , \quad \omega_o t = \tau \\ \zeta_M &= \frac{1+m}{1+n} \zeta , \quad m = \frac{J_L}{J_M} , \quad n = \frac{B_L}{B_M} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

とおいて (5.2) 式を無次元化すれば、

$$\ddot{\theta}_M + 2\zeta_M \dot{\theta}_M = \mp (1+m) \{ |\theta_{Lo}| - F_M/K \} , \quad \cdot \equiv d/d\tau \quad (5.4)$$

あるいは

$$\dot{\theta}_M \left( \frac{d\dot{\theta}_M}{d\theta_M} + 2\zeta_M \right) = \mp (1+m) \{ |\theta_{Lo}| - F_M/K \} , \quad \theta_{Lo} \geq 0 \quad (5.5)$$

となる。(5.5) 式より、

$$\theta_M = \theta_{M0} - \frac{\dot{\theta}_M}{2\zeta_M} + \frac{\pm(1+m)(|\theta_{Lo}| - F_M/K)}{4\zeta_M^2} \log \left\{ 1 + \frac{2\zeta_M \dot{\theta}_M}{\pm(1+m)(|\theta_{Lo}| - F_M/K)} \right\} ,$$

$$\theta_{Lo} \geq 0 \quad (5.6)$$

を得る。ここで  $\theta_{M0}$  は負荷が  $\theta_{Lo}$  まで回転し、ここから分離が始まるとしたときのモータの回転角であって、 $\theta_{Lo} \geq 0$  によって、

$$\theta_{M0} = \theta_{Lo} \pm \frac{\theta_B}{2} \quad (5.7)$$

与えられる。(5.6) 式が分離域におけるモータの動作をあらわす基本式である。

なお

$$\left| \frac{2\zeta_M \dot{\theta}_M}{(1+m)(|\theta_{Lo}| - F_M/K)} \right| \ll 1 \quad (5.8)$$

がなりたつとき、すなわち負荷の慣性がモータの慣性に比していちじる



しく大きいときには (5.6) 式は近似的に、

$$\theta_M = \theta_{M0} \mp \frac{\dot{\theta}_M^2}{2(1+m)(|\theta_{L0}| - F_M/K)} \quad (5.9)$$

となる。したがってモータが分離域においてバックラッシュの角度  $\theta_B$  だけ回転して、再び負荷と結合する瞬間の速度  $\dot{\theta}_{MP}$  は、(5.9)式において、

$$\theta_M = \theta_{M0} \mp \theta_B$$

となったときの速度であるから、

$$\dot{\theta}_{MP} = \mp \sqrt{2\theta_B(1+m)(|\theta_{L0}| - F_M/K)}, \quad \theta_{L0} \geq 0 \quad (5.10)$$

で与えられる。

## 2.2.2 結合域における基本式

モータと負荷が結合して両者がともに回転する領域すなわち結合域においては、その運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} (J_M + J_L) \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + (B_M + B_L) \frac{d \theta_M}{dt} \pm F &= K\varepsilon, \\ \varepsilon = -\theta_L = -\left(\theta_M \mp \frac{\theta_B}{2}\right), \quad \frac{d \theta_M}{dt} &\geq 0 \\ F &= F_M + F_L \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

となり、この場合の誤差信号  $\varepsilon(t)$  はモータの回転角とともに変化する。前と同様に (5.3) 式を用いて (5.11) 式を無次元化すれば、

$$\ddot{\theta}_M + 2\zeta \dot{\theta}_M + \theta_M = \pm \left\{ \frac{\theta_B}{2} - \frac{F}{K} \right\}, \quad \dot{\theta}_M \geq 0 \quad (5.12)$$

あるいは、

$$\frac{d \dot{\theta}_M}{d \theta_M} = -\frac{1}{\dot{\theta}_M} \left\{ \theta_M + 2\zeta \dot{\theta}_M \mp \left( \frac{\theta_B}{2} - \frac{F}{K} \right) \right\}, \quad \dot{\theta}_M \geq 0 \quad (5.13)$$

となる。さらに、

$$\mp \left( \frac{\theta_B}{2} - \frac{F}{K} \right) = f, \quad \dot{\theta}_M \geq 0 \quad (5.14)$$

とおけば (5.13) 式は

$$\left. \begin{aligned} & (\theta_M - f)^2 + 2\zeta(\theta_M - f)\dot{\theta}_M + \dot{\theta}_M^2 \\ & = C \exp \left[ \frac{2\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{(\theta_M - f)\zeta + \dot{\theta}_M}{(\theta_M - f)\sqrt{1-\zeta^2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

C: 積分常数

とあらわすことができる。(5.13) 式あるいは (5.15) 式が結合域におけるモータの速度と位置をあらわす基本式である。

### 2.2.3 結合時点におけるモータ速度

分離域においてモータは単独に回転したのち負荷と結合するが、この結合の時の両者の運動は二つの回転体の衝突と考えられる。結合時点におけるモータの発生トルクが結合した系のクーロン摩擦トルクより大きい場合には、衝突後負荷はモータとともに回転することになる。反対にモータの発生トルクが結合系のクーロン摩擦トルクより小さい場合には、モータおよび負荷はこのまま停止し、このときの回転角が定常誤差を与えることになる。

さてモータと負荷の衝突の前後で  $= \mp 0$  において角運動量が保存されるとすれば、

$$J_M \dot{\theta}_M(-0) + J_L \dot{\theta}_L(-0) = J_M \dot{\theta}_M(+0) + J_L \dot{\theta}_L(+0) \quad (5.16)$$

が成立する。またこの場合の反跳係数を  $e$  とすれば、

$$\dot{\theta}_M(+0) - \dot{\theta}_L(+0) = -e \{ \dot{\theta}_M(-0) - \dot{\theta}_L(-0) \} \quad (5.17)$$

となる。しかるに  $\dot{\theta}_L(-0) = 0$  であるから、上の二式から、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_M(+0) &= \frac{J_M - eJ_L}{J_M + J_L} \dot{\theta}_M(-0) = \frac{1 - em}{1 + m} \dot{\theta}_M(-0) \\ \dot{\theta}_L(+0) &= \frac{J_M(1+e)}{J_M + J_L} \dot{\theta}_M(-0) = \frac{1+e}{1+m} \dot{\theta}_M(-0) \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

を得る。この式から明らかに、

$$\dot{\theta}_M(+0) \leq \dot{\theta}_L(+0) \quad (5.19)$$

であって、衝突後負荷は  $e \neq 0$  のときには再びモータからはなれて自由運動をし、 $e=0$  のときにはモータと結合して同一運動をすることになる。しかしながら実際の場合には、 $e \neq 0$  であっても  $J_L$  の値があまり大きくなく、また負荷軸のクーロン摩擦のために負荷の自由運動は急激に減速されてモータは負荷と再度衝突し、最初の衝突から極めて短時間のうちに両者が結合して同一運動をするものと考えられる。

そこでいま解析を簡単にするために  $e=0$  として、モータと負荷は衝突後ただちに結合して同一運動をし、またモータが停止すれば同時に負荷も停止するものとする、結合時点では (5.18) 式から、

$$\dot{\theta}_M(+0) = \dot{\theta}_L(+0) = \frac{1}{1+m} \dot{\theta}_M(-0) \quad (5.20)$$

となる。すなわち結合直後のモータ速度は、結合直前のモータ速度の  $1/(1+m)$  倍になる。

### 2・3. 分離域と結合域の境界

$\dot{\theta}_M=0$  となるたびにモータが逆方向に回転すると、このサーボ機構の過渡応答は振動的になる。この場合  $\dot{\theta}_M=0$  となる時点での誤差信号によるモータの発生トルクはモータをその時点までとは逆の方向に回転させる極性をもっている、これがモータ軸のクーロン摩擦よりも大きい場合にはモータが逆方向に回転することになる。このような場合には、モータが負荷と同一運動をする結合域において  $\dot{\theta}_M = \dot{\theta}_L = 0$  となれば、負荷はそのまま停止し、モータは逆方向に回転するので、モータと負荷はこの時点で分離することになる。すなわち  $\dot{\theta}_M=0$  が結合から分離への境界を与えることになる。

次に分離域における運動について考えると、モータが負荷から分離したのち逆方向にバックラッシュの角度  $\theta_B$  だけ回転すれば、このとき再

---

\* 実際の場合に  $J_L$  の値が大きくても、歯車比が比較的小さくとられるので、モータ軸に対する  $J_L$  の効果は相当小さくなる。

び負荷と結合することになる。分離域におけるモータ速度は  $\theta_{L0} \approx 0$  に伴って  $\dot{\theta}_M \leq 0$  となるので、分離のはじまるときのモータの初期位置を  $\theta_{M0}$  とすれば、分離域の基本式(5.6)式において、

$$\theta_M = \theta_{M0} \mp \theta_B = \theta_{L0} \pm \frac{\theta_B}{2}, \quad \dot{\theta}_M \leq 0 \quad (5.21)$$

となる点  $(\theta_M, \dot{\theta}_M)$  を種々の  $\theta_{M0}$  すなわち負荷の停止位置  $\theta_{L0}$  に対して求めると、この点の軌跡が分離から結合への境界を与えることになる。したがって(5.9)式の近似が用いられる場合には、(5.21)式および(5.10)式で与えられる点  $(\theta_{MP}, \dot{\theta}_{MP})$  を種々の  $\theta_{L0}$  に対して求めれば、分離と結合の境界がモータ速度と位置の関係として求められる。

#### 2・4. 位相面による自励振動の解析

第2.2節で求めた基本式と第2.3節で求めた分離と結合の境界線とから第5.1図で示されるサーボ機構の自励振動を、位相面を用いて解析する。

いま平衡状態にあるこのサーボ機構のモータの回転角を、階段状に変化させた場合、その後のモータの回転角の過渡応答を表わす位相面軌道は、モータと負荷の分離および結合によって、それぞれ(5.5)式および(5.13)式で与えられる。

分離域においては負荷の回転角が変化しないので誤差信号は一定であり、したがってこの状態ではモータの回転角の平衡状態を与える位相面上の特異点は存在せず、このことは(5.5)式を見ても明らかである。

一方結合域においては、その平衡状態を与える特異点は、(5.13)式において、

$$\left. \begin{aligned} \theta_M + 2\zeta \dot{\theta}_M \mp \left( \frac{\theta_B}{2} - \frac{F}{K} \right) &= 0, & \dot{\theta}_M &\geq 0 \\ \dot{\theta}_M &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

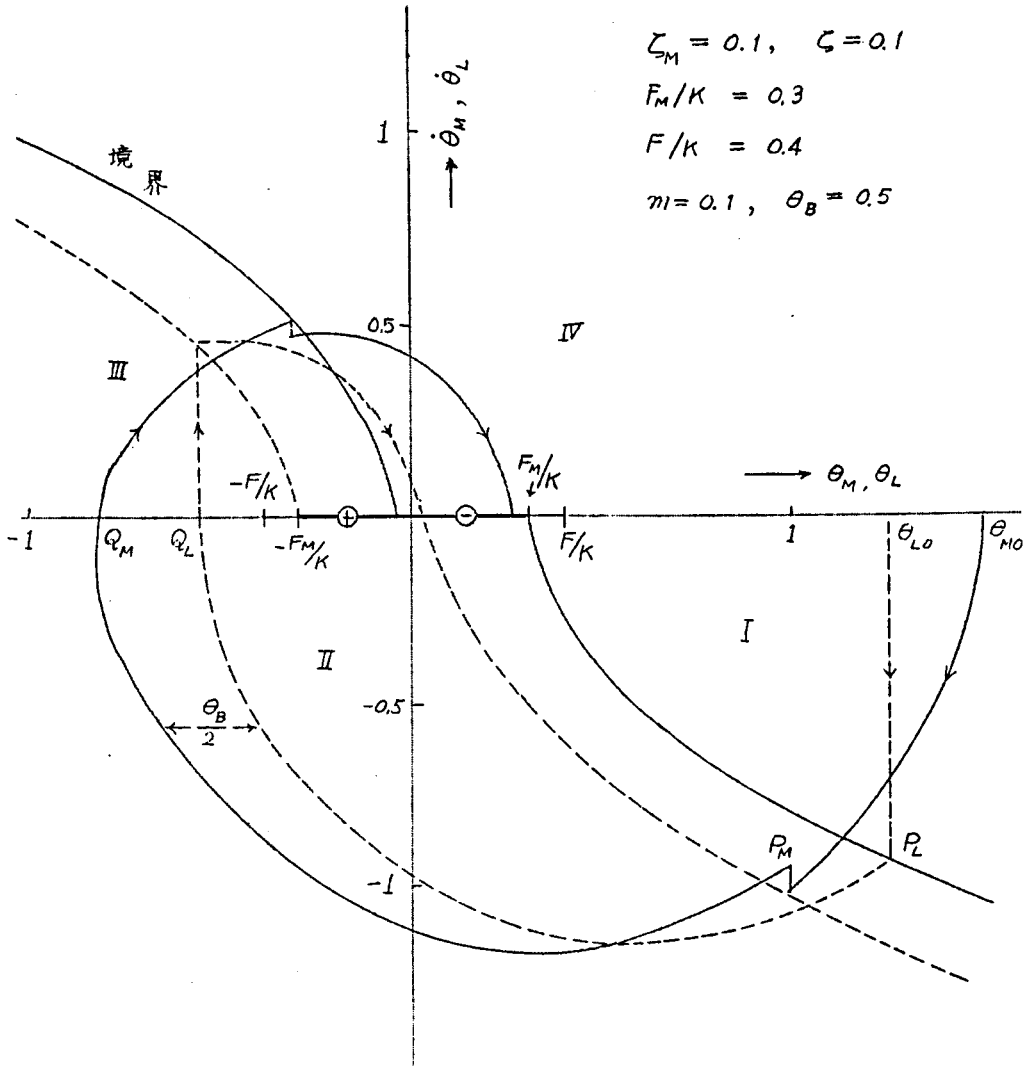
とにおいて得られ、このサーボ機構が安定である場合には、位相面軌道はこの特異点に収れんするような軌道を描くことになる。つぎにこの特異

点に対するバックラッシュと、クーロン摩擦の影響について考える。

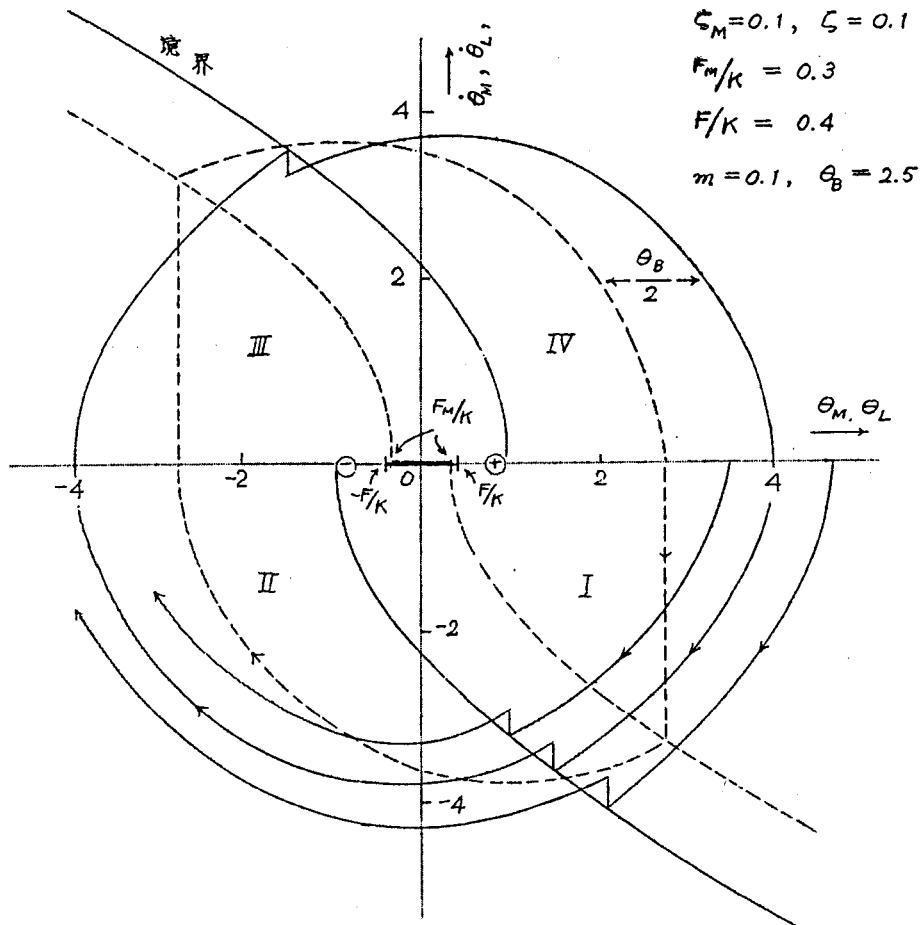
いまバックラッシュおよびクーロン摩擦の存在しない線形系においては、(5.22)式において  $\theta_B = 0$ ,  $F = 0$  となるので、特異点は  $\theta_M = 0$ ,  $\dot{\theta}_M = 0$  となり、位相面の原点にくる。つぎにこれにクーロン摩擦が加わった場合を考えると、特異点は  $\theta_M$  軸上において位相面の上半面の軌道 ( $\dot{\theta}_M > 0$ ) に対しては原点より左に、下半面の軌道 ( $\dot{\theta}_M < 0$ ) に対しては原点より右に移動することになる。したがって各半面における位相面軌道が、線形系の場合よりも  $\theta_M$  軸に近い点を通して平衡状態に収れんすることになり、この場合は線形系の場合よりも安定であることがわかる。クーロン摩擦を含まないで、バックラッシュのあるサーボ機構では (5.22) 式からわかるように、特異点は位相面の上下各半面の位相面軌道に対して上の場合と反対の方向に移動することになるので、この場合には線形系の場合より不安定になり、サーボ機構の条件如何によっては自励振動を発生することになる。

そこでクーロン摩擦とバックラッシュが共存する場合には、 $\frac{\theta_B}{2} - \frac{F}{K}$  の大小如何によって結合域での特異点は  $\theta_M$  軸上で原点の左右に移動する。したがって  $\frac{\theta_B}{2} - \frac{F}{K} < 0$  であるか、 $\frac{\theta_B}{2} - \frac{F}{K} > 0$  であってもこの値が余り大きくないときには、位相面軌道は次第に特異点に収れんし、これが  $\theta_M$  軸上のモータ軸のクーロン摩擦トルクに相当する区間と交った点でモータが停止することになる。すなわちこの場合の過渡応答は減衰振動的である。この例を第 5.4 図に示した。図において  $\dot{\theta}_M > 0$  の場合の結合域に対する特異点を  $\oplus$ ,  $\dot{\theta}_M < 0$  に対するものを  $\ominus$  で示してある。最初モータおよび負荷の回転角が  $\theta_{M0}$ ,  $\theta_{L0}$  まで階段状に変化したとき、モータは負荷から分離して逆の方向に回転しはじめる。これが  $\theta_B$  だけ回転すると負荷と結合し、このとき負荷の回転角は変化しないが、その速度は前節でのべたように、結合直前のモータ速度の  $1/(1+m)$  まで不連続的に上昇し、またモータ速度は不連続的にこの値まで低下する。この結合直後のモータおよび負荷の状態が点  $P_M$ ,  $P_L$  で示されている。つぎに両者は結合した状態で  $Q_M$ ,  $Q_L$  に達し、その速度は 0 になる。

点  $Q_L$  における負荷の回転角の絶対値がモータ軸のクーロン摩擦トルクに相当する  $F/K$  より大きいときにはモータは再び誤差信号によって図のように正方向に回転する。このとき負荷は  $Q_L$  に停止し、再び結合域に至ってモータと共に運動を始める。図においてモータおよび負荷の位相面軌道はそれぞれ実線および破線で示されており、結合域における両者



第 5.4 図 位相面軌道 (1) ( $\theta_B : 0.5$ )



第 5.5 図 位相面軌道 (2) ( $\theta_B: 2.5$ )

の回転角は  $\theta_B/2$  だけずれている。なお I, III は分離域、II, IV は結合域であって、その境界線は 2, 4 節に述べた方法によって求められる。

クーロン摩擦に比べて、バックラッシュが大きい場合には、 $\frac{\theta_B}{2} - \frac{F}{K} > 0$  となり、(5.22) 式より得られる特異点は  $\dot{\theta}_M < 0$  では原点より左に、 $\dot{\theta}_M > 0$  では原点より右に移動する。サーボ機構のパラメータの如何によってはこの特異点の移動が相当大きくなり、これに伴って位相面軌道が特異点に収れんせず、その周囲に安定なリミットサイクルを描く場合がある。この場合の 1 例を第 5.5 図に示した。すなわちこの場合サーボ機構は安定な自励振動を発生することになる。

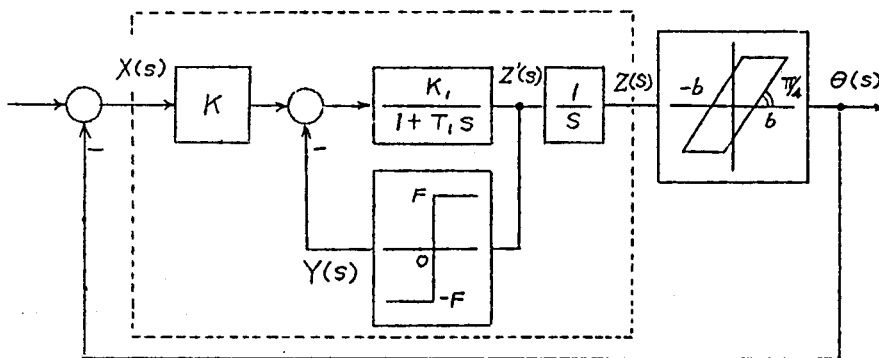
図で実線はモータの位相面軌道を、破線は負荷の位相面軌道を示し、領域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳは第5.4図の場合と対応している。なお第5.5図は第5.4図を描いたときの定数のうち、バックラッシュの角度 $\theta_B$ のみを変化させることによって得られたものである。

### 3. 負荷の慣性を考慮しない場合の自励振動<sup>(37)</sup>

通常サーボ計算器等のサーボ機構においては、モータによって駆動される負荷は一般にポテンシオメータの接触子のようにその慣性および摩擦を無視しても差支えない場合が多い。本節ではこのようなサーボ機構においてバックラッシュとクーロン摩擦が存在する場合の系に発生する自励振動について論ずる。

#### 3・1. 基本式

いま第5.6図に示すようなサーボ機構を考える。サーボモータに大きさ $F$ のクーロン摩擦が、また出力部の連結歯車に幅 $2b$ のバックラッシュが存在するものとする。



第5.6図 クーロン摩擦とバックラッシュのあるサーボ機構の構成図



いまこのサーボ機構に発生する自励振動が正弦波状に変化するものとし、誤差信号  $x(t)$  を

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (5.22)$$

と仮定する。ここで  $\varphi(>0)$  は出力速度  $z'(t)$  が負から正に変化する点を時間の原点としたときの  $x$  の位相角である。

そこでクーロン摩擦トルク  $y(t)$  のラプラス変換を  $Y(s)$ 、 $x(t)$  のラプラス変換を  $X(s)$  とすると、出力位置  $z(t)$  のラプラス変換  $Z(s)$  は、

$$Z(s) = \frac{KK_1}{s(1+T_1s)} X(s) - \frac{K_1}{s(1+T_1s)} Y(s) \quad (5.23)$$

となる。しかるに、

$$Y(s) = \frac{F}{s} \frac{1 - \exp(-Ts)}{1 + \exp(-Ts)} \quad (5.24)$$

$$\text{ただし } T = \pi/\omega$$

であるから、(5.22)、(5.24) 式を用いて (5.23) 式をラプラス逆変換すると、

$$\left. \begin{aligned} Z(t) = & \frac{KK_1A}{\omega\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} \sin(\omega t + \varphi - \phi) - FK_1 \left[ \left(t - \frac{T}{2}\right) \right. \\ & \left. - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

ただし

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \omega T_1$$

とあらわされる。

(5.25) 式であらわされる  $z(t)$  がバックラッシュ要素への入力信号となるわけであるが、このままでは取扱いが困難なので  $z(t)$  をフーリエ級数に展開してその基本波成分のみをとり、バックラッシュ要素への入力としてこの基本波のみを考える。これは前章で用いた手法と全く同様であって、いまこの基本波成分を  $z_1(t)$  とおくと、

$$z_1(t) = Z_p \sin(\omega t - \xi)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} Z_p &= \frac{KK_A \sqrt{1+B^2-2B\cos\varphi}}{\omega \sqrt{1+(\omega T_1)^2}}, \quad B = \frac{4F}{\pi K_A} \\ \xi &= -\frac{\pi}{2} + t_g^{-1} \frac{\cos(\varphi-\phi) - B\cos\phi}{\sin(\varphi-\phi) + B\sin\phi} \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

となる。(5.25)式、(5.26)式において  $\varphi$  は未知数であるが、

$$z_1'(0) = 0$$

より求めることができる。そこで(5.25)式を1回微分して  $t=0$  とおけば、

$$\varphi = t_g^{-1} \omega T_1 - \sin\left(\frac{F}{KA} \sqrt{1+(\omega T_1)^2} \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \quad (5.27)$$

を得る。

また(5.26)式であらわされる  $z_1(t)$  に対し、バックラッシュ要素の出力の基本波成分  $\theta_1(t)$  は、

$$\theta_1(t) = \theta_p \sin(\omega t - \xi + \psi)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \theta_p &= \sqrt{q_1^2 + q_2^2} Z_p, \quad \psi = t_g^{-1} \frac{q_2}{q_1} \\ q_1 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(1 - \frac{2b}{Z_p}\right) + 2\left(1 - \frac{2b}{Z_p}\right) \sqrt{\frac{b}{Z_p}\left(1 - \frac{b}{Z_p}\right)} \right\} \\ q_2 &= -\frac{4}{\pi} \frac{b}{Z_p} \left(1 - \frac{b}{Z_p}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

となる。

### 3・2 自励振動の解析

いまこのサーボ機構に発生する自励振動を検討するために、第5.6図の点線で囲んだ部分の等価伝達関数を  $G_{DF}$  とし、バックラッシュの等価伝達関数を  $G_{DB}$  とすると、

$$G_{DF} = \frac{Z_p}{F} \angle \varphi + \xi \quad (5.29)$$

$$G_{DB} = \frac{\theta_p}{Z_p} \angle \psi \quad (5.30)$$

となり、このようにするとき、 $G_{DF}$ 、 $G_{DB}$  はこれをあたかも線形の伝達関数のように取扱うことができるので、第5.6図のサーボ機構の特性方程式から

$$G_{DF} = -\frac{1}{G_{DB}} \quad (5.31)$$

を得る。そこで  $G_{DF}$  と  $-1/G_{DB}$  の軌跡を複素平面上に描けば、その交点が自励振動の角周波数  $\omega$ 、および振幅  $F$  を与える。すなわち (5.31) 式の左辺は (5.26) 式、(5.27) 式からわかるようにある一定の  $KK$ 、 $F/KF$  の値に対して周波数軌跡で与えられ、また右辺は (5.28) 式からわかるように、 $b/Z_p$  をパラメータとする振幅軌跡で与えられる。そこでその2つの軌跡の交点は、ある一定の  $KK$ 、および  $F/KF$  の値に対し、自励振動時の  $\omega$  および  $b/Z_p$  を与える。そこでこの2つの値より (5.26) 式を用いて自励振動の振幅  $F$  が  $F/b$  の値として求められる。 $F/KF=0.2$ 、 $KK, T_i=7$  のときの  $G_{DF}$  および  $-1/G_{DB}$  の軌跡の1例を示せば第5.7図のようになる。

同図からわかるように、このとき両軌跡は交点  $P_1$ 、 $P_2$  をもち、それぞれ交点を満足する  $\omega T_i$ 、 $b/Z_p$  およびこれらの数値より (5.26) 式を用いて得られる  $Z_p/F$  の値は、 $P_1$  点では  $\omega T_i=1.23$ 、 $b/Z_p=0.745$ 、 $Z_p/F=3.14$  であり、 $P_2$  点では  $\omega T_i=0.55$ 、 $b/Z_p=0.908$ 、 $Z_p/F=8.57$  である。これから  $F/b$  の値は

$$\frac{F}{b} = \frac{b}{Z_p} \times \frac{Z_p}{F}$$

より計算すると  $P_1$  点では 0.427、 $P_2$  点では 0.1285 を得る。

このようにしてこのサーボ機構が自励振動をしているときの  $F/b$  と  $KK, T_i$  の関係を  $F/KF$  をパラメータにして示せば第5.8図の実線のよ

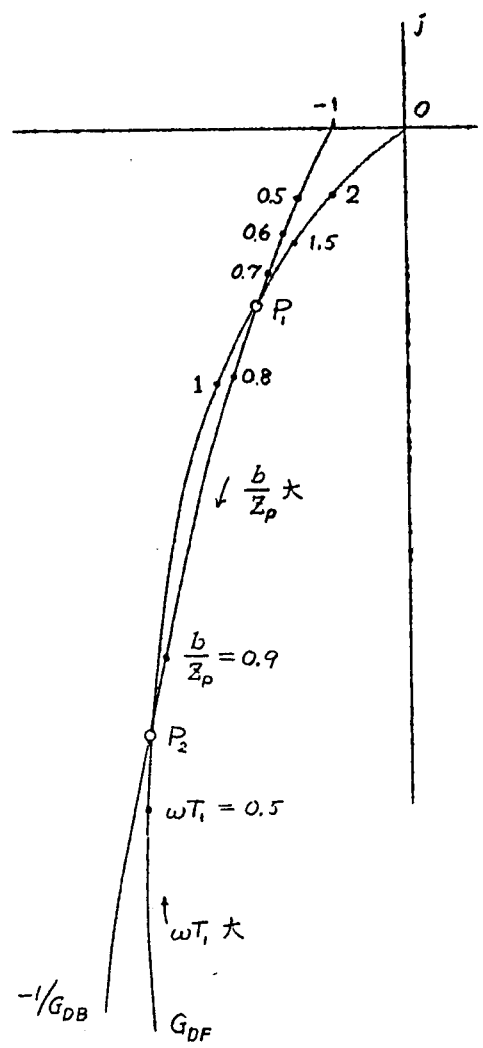
うになる。それぞれの実線上で、実線が満足する  $R/b$  と  $KK, T_i$  の値によって  $\omega T_i$  の値が定る。  $\omega T_i$  値が増大する方向を  $F/KA=0$  の実線上矢印で示した。他の実線についても同様である。

### 3. 3. 自励振動の安定問題

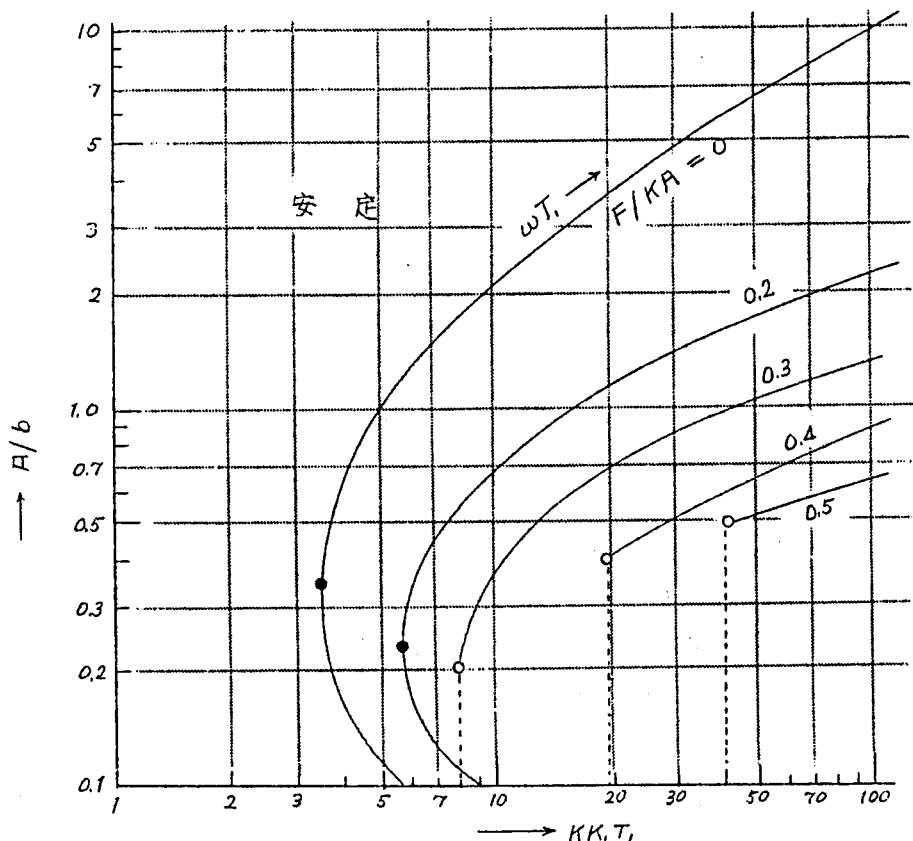
つぎに上で求めた自励振動の安定問題を考察する。いま考察の便のため第5.7図をかきなおして第5.9図とする。

第5.9図は複素平面上に、(5.29), (5.30) 式を用いて  $G_{DF}$  および  $-1/G_{DB}$  の軌跡を描いたものであり、両軌跡は交点  $P_1, P_2$  をもつものとする。根軌跡  $-1/G_{DB}$  の  $P_1, P_2$  の区間は周波数軌跡  $G_{DF}$  によって囲まれているので、この区間は不安定、また  $-1/G_{DB}$  のその他の区間は安定である

ことがわかる。そこでいま  $P_1$  点における自励振動について考えてみると、もしこの点で何らかの外乱によって自励振動の振幅が増大し、 $P_1$  点が  $P_1'$  点に移動したとすると、この点は安定であるから振動は次第に減衰する。また逆に振幅が減少して  $P_1''$  点に移動したとすると、ここでは不安定であるから振幅は次第に増大し、結局  $P_1$  点におちつき、自励振動



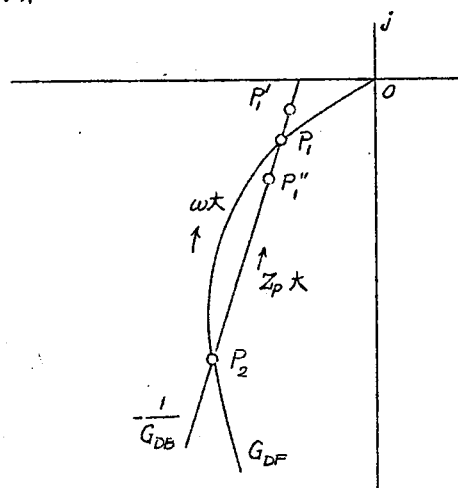
第5.7図 (5.31) 式の複素平面表示  
( $F/KA=0.2, KK, T_i=7$ )



第 5.8 図 クーロン摩擦とバックラッシュ要素をもつサーボ機構の自励振動の限界

をすることになる。したがって  $P_1$  点では安定な自励振動をする。同様に考察すれば  $P_2$  点では不安定な自励振動をすることがわかる。

以上の考察を第 5.8 図について検討すれば、第 5.8 図の実線上黒丸印より大きい  $\omega T_i$  で安定な自励振動をするが、小さい  $\omega T_i$  では自励振動は不安定とな



第 5.9 図 複素平面による安定判別

り存在しない。また曲線より右の領域では不安定、左の領域では安定であることがわかる。

### 3.4. クーロン摩擦の自励振動に対する影響

もし安定な自励振動が発生したとしても、その振幅および角周波数がクーロン摩擦トルクにうちかつ条件をみたしていなければ振動は摩擦のために停止するので自励振動は起こらないことになる。本節ではこの摩擦による自励振動の停止限界を求める。

さてサーボモータへ入力トルクが正弦波状に変化するとき、モータの出力速度が零の時点で入力トルクの大きさがクーロン摩擦トルクの大きさ  $F$  より小さいときは、入力トルクは摩擦トルクにうちかつことができず、モータは停止する。すなわちモータの停止限界は出力速度が零の時点で入力トルクの大きさが  $F$  のときである。

そこでいま出力速度が零の時点を時間の原点にとっているので停止限界は、

$$Kx(+0) = F \quad (5.32)$$

で与えられる。しかるに

$$T_1 z''(+0) + z'(+0) + K_1 F \operatorname{sgn} z'(+0) = K K_1 x(+0) \quad (5.33)$$

であるから (5.32), (5.33) 両式から  $z'(+0) = 0$  を用いて、

$$z''(+0) = 0 \quad (5.34)$$

を得る。

(5.25) 式を用いて  $z''(t)$  を計算し、 $t=0$  とおくと、

$$\frac{KA\omega}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} \cos(\varphi - t_0^{-1} \omega T_1) - \frac{F}{T_1} (1 + \tanh \frac{T}{2T_1}) = 0 \quad (5.35)$$

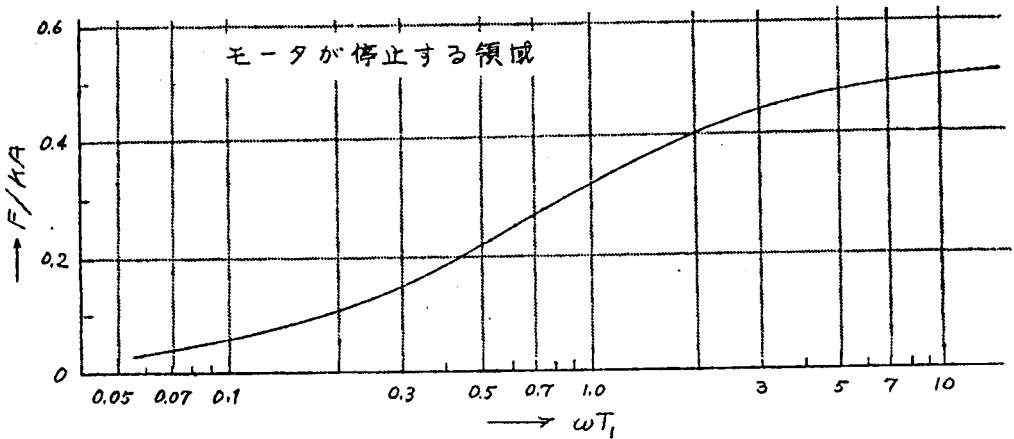
となる。また  $z'(+0)$  より、

$$\frac{KA}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} \sin(\varphi - t_0^{-1} \omega T_1) + F \tanh \frac{T}{2T_1} = 0 \quad (5.36)$$

となる。(5.35), (5.36) 両式より、

$$\frac{F}{KA} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T_i)^2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\tanh \frac{T}{2T_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega T_i}\right)^2 \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_i}\right)^2}} \quad (5.37)$$

(5.37) 式は入力トルクが  $KA \sin(\omega t + \varphi)$  で自励振動しているとき、モータがクーロン摩擦トルク  $F$  のために停止する限界をあらわす。(5.37) 式より停止限界での  $F/KA$  と  $\omega T_i$  の関係を示せば第 5.10 図を得る。曲線の上側の領域がモータが停止する領域である。



第 5.10 図 モータの停止限界

そこで第 5.7 図に示した方法で求めた自励振動角周波数  $\omega T_i$  の値がこの限界を含めて停止領域にあれば、その自励振動はクーロン摩擦のために停止することになる。第 5.8 図の実線上の印で示した点がこの限界を与える。したがってこの場合のこのサーボ機構の不安定領域は第 5.8 図に示すように実線と破線で囲まれた部分となる。

第 5.8 図をみるとわかるように、このサーボ機構において自励振動が発生しないためにはクーロン摩擦のない場合は  $KT_i$  の値を 3.5 以下にえらぶ必要があるが、クーロン摩擦が存在するとこの値をさらに大きくとってもこのサーボ機構に自励振動が発生しないことがわかる。

## 4. 結 言

本章においては負荷の慣性が無視できない場合、無視して差支えない場合の各々についてクーロン摩擦とバックラッシュのあるサーボ機構に発生する自励振動を解析し、これからサーボ機構の安定性に対するバックラッシュとクーロン摩擦の影響について論じた。

まず慣性負荷を駆動するサーボ機構にクーロン摩擦とバックラッシュが存在するとき、負荷とモータが結合して動作する場合、分離して動作する場合の各々の力学系の運動方程式を解き、位相面を用いて過渡応答を求めた。その結果バックラッシュとクーロン摩擦の大きさの如何によって自励振動が発生することをたしかめ、そのときの負荷とモータの運動に対する位相面軌道を求めた。

また負荷の慣性が無視できるような場合、この系に発生する自励振動を正弦波状に変化するものと仮定して、クーロン摩擦を含むモータ部分の *describing function* とバックラッシュ要素の *describing function* を求めてこれらを複素平面上に描くことにより、このサーボ機構の自励振動発生限界を求めた。クーロン摩擦が大きくなるとこの摩擦トルクのため、自励振動は発生しなくなり、サーボ機構の安定領域が増加することをたしかめた。



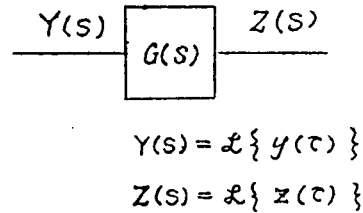
## 謝 辞

本研究は京都大学工学部林千博教授御指導のもとに行なわれたものであって、永年に亘り終始御懇篤な御指導と御鞭撻を賜わった同教授に対し、ここに衷心より御礼申上げる。また、本研究の遂行にあたり、種々御指導、御教示いただいた桑原道義助教授に深甚なる謝意を表するとともに、種々御討論いただいた坂和愛幸講師にお礼申しあげる。

また、安倍 稔君(京都大学)、井上幸美君(三菱電機)、鈴木康夫君(松下電工)、故並平玄洞君の御協力を得、さらに、林千博教授研究室の方々をはじめ電気工学教室および電子工学教室の各位の御援助を得た。ここに厚く御礼申し上げる。

# 付録 1. (1.8) 式の誘導

一般に、線形要素  $G(s)$  に  $T = \pi/\omega$  を半周期として周期的に変化する方形波  $y(\tau)$  を加えた場合、定常状態におけるその出力  $z(\tau)$  は  $y(\tau)$  および  $z(\tau)$  のラプラス変換をそれぞれ  $Y(s)$ ,  $Z(s)$  とすれば、付 1 図に示すように

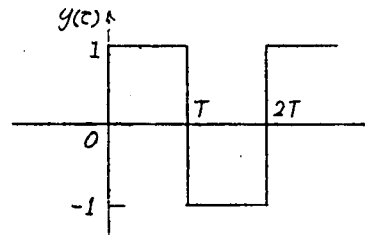


付 1 図

$$Z(s) = G(s) Y(s)$$

となるので、これを逆ラプラス変換して求めることができる。いま  $y(\tau)$  として付 2 図に示すような振幅 1 の方形波とすれば、すでに本文中にも記したように、

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1 - \exp(-Ts)}{1 + \exp(-Ts)}$$



付 2 図

である。そこでいま各種の  $G(s)$  について  $z(\tau)$  を求めてみよう。

(i)  $G(s) = 1/(1 + T_1 s)$  のとき、

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{1}{1 + T_1 s} \frac{1}{s} \frac{1 - \exp(-Ts)}{1 + \exp(-Ts)} \\ &= \frac{1}{s(1 + T_1 s)} \left\{ 1 - 2 \exp(-Ts) + 2 \exp(-2Ts) - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + 2(-1)^n \exp(-nTs) + \dots \right\} \end{aligned}$$

となるのでこれを項別にラプラス逆変換して、

$$\begin{aligned} z(\tau) &= \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right) \right\} - 2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau-T}{T_1}\right) \right\} u(\tau-T) + \dots \\ &\quad \dots + 2(-1)^n \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau-nT}{T_1}\right) \right\} u(\tau-nT) + \dots \end{aligned}$$

(ただし  $n$  は正の整数)

となる。いま  $nT \leq \tau \leq (n+1)T$  とすると、

$$Z(\tau) = \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right) \right\} - 2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau-T}{T_i}\right) \right\} + \dots + 2(-1)^n \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau-nT}{T_i}\right) \right\}$$

となる。そこで  $n$  を偶数とすると、

$$Z(\tau) = 1 + \left\{ \left( \tanh \frac{T}{2T_i} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right) - \left( 1 + \tanh \frac{T}{2T_i} \right) \exp\left\{-\frac{1}{T_i}(\tau-nT)\right\} \right\}$$

を得る。ここで  $\tau-nT = \tau'$  とおき、 $n$  を充分大きくとると定常状態では  $\tau'$  をさらに  $\tau$  とおいて、

$$Z(\tau) = 1 - \left( 1 + \tanh \frac{T}{2T_i} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right) \quad 0 \leq \tau \leq T$$

となる。

(ii)  $G(s) = k/s$  のとき

$G(s) = k_i/(1+T_i s)$  に対する  $Z(\tau)$  は

$$Z(\tau) = k_i \left\{ 1 - \left( 1 + \tanh \frac{T}{2T_i} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right) \right\}$$

であるので、ここで  $\frac{1}{T_i} \rightarrow 0$ ,  $\frac{k_i}{T_i} \rightarrow k$  とすると、求める  $Z(\tau)$  は

$$Z(\tau) = k \left( \tau - \frac{T}{2} \right) \quad 0 \leq \tau \leq T$$

となる。

(iii)  $G(s) = 1/s(1+T_i s)$

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{T_i}{1+T_i s}$$

となるので、さきに求めた (i), (ii) の結果を用いれば、

$$Z(\tau) = \tau - \frac{T}{2} - T_i \left\{ 1 - \left( 1 + \tanh \frac{T}{2T_i} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right) \right\}$$

を得る。

$$(iv) \quad G(s) = \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$Z(s) = \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s} \left\{ 1 - 2 \exp(-Ts) + 2 \exp(-2Ts) - \dots \right. \\ \left. \dots + 2(-1)^n \exp(-nTs) + \dots \right\}$$

となるので、これに

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau, \\ (\alpha = \omega_0 \zeta, \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}, \zeta^2 < 1)$$

を使って項別にラプラス逆変換し、 $nT \leq \tau \leq (n+1)T$  とすれば、

$$z(\tau) = \frac{1}{\beta} \left[ \sin \beta\tau \cdot \exp(-\alpha\tau) - 2 \sin \beta(\tau - T) \exp\{-\alpha(\tau - T)\} + \dots \right. \\ \left. \dots + 2(-1)^n \sin \beta(\tau - nT) \exp\{-\alpha(\tau - nT)\} \right] \\ = \mathcal{I}_m \frac{1}{\beta} \cdot \exp\{-(\alpha - j\beta)\tau\} \cdot \left[ 1 - 2 \exp\{(\alpha - j\beta)T\} + \dots \right. \\ \left. \dots + 2(-1)^n \exp\{(\alpha - j\beta)nT\} \right]$$

となる。

前と同様に  $n$  を偶数とし、定常状態を考えると、

$$z(\tau) = \frac{2}{\beta} \frac{\sin \beta\tau - \sin \beta(T - \tau) \exp(-\alpha T)}{1 + 2 \exp(-\alpha T) \cos \beta T + \exp(-2\alpha T)}$$

を得る。

$$v) \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$Z(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)} \left\{ 1 - 2 \exp(-Ts) + 2 \exp(-2Ts) - \dots \right. \\ \left. \dots + 2(-1)^n \exp(-nTs) + \dots \right\}$$

となるので、

$$\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)} = \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} - \frac{2\zeta\omega_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \right\} \frac{1}{\omega_0^2}$$

とし、各項別にラプラス逆変換すればよい。

以上の結果をまとめると、付第1表のようになる。<sup>(38)</sup>

付第1表

$G(s)$	$z(\tau), 0 \leq \tau \leq T$
$\frac{1}{1+T_1 s}$	$1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right)$
$\frac{1}{s}$	$\tau - \frac{T}{2}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau}{2} T$
$\frac{1}{s(1+T_1 s)}$	$\tau - \frac{T}{2} - T_1 \left\{ 1 - \left(1 + \tanh \frac{T}{2T_1}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right) \right\}$
$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\frac{2}{\beta} \frac{\sin\beta\tau - \sin\beta(T-\tau)\exp(-\alpha T)}{1 + 2\exp(-\alpha T)\cos\beta T + \exp(-2\alpha T)} \exp(-\alpha\tau),$ $\alpha = \omega_0\zeta, \beta = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}, \zeta^2 < 1$
$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$\frac{1}{\omega_0^2} \left[ 1 - \frac{2}{\beta} \frac{\exp(-\alpha\tau)}{1 + 2\exp(-\alpha T)\cos\beta T + \exp(-2\alpha T)} \left\{ \alpha + \exp(-\alpha T)\alpha\cos\beta T \right. \right.$ $\left. + \exp(-\alpha T)\beta\sin\beta T \right\} \sin\beta\tau + \left\{ \beta + \exp(-\alpha T)\beta\cos\beta T \right.$ $\left. - \exp(-\alpha T)\alpha\sin\beta T \right\} \cos\beta\tau \Big]$ $\alpha = \omega_0\zeta, \beta = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}, \zeta^2 < 1$

## 付録 2 (2.26)式～(2.28)式の証明<sup>(39)</sup>

いま  $\phi(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{|x|}$  なるリレー特性を仮定し、 $x(t) = 0$  なる関係を満足する時刻を  $t_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) であらわし、 $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$  かつ  $x'(t_0) > 0$  とすれば付3図に示すように、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \phi(x) &= \mathbb{1}(t-t_0) - \mathbb{1}(t-t_1) + \mathbb{1}(t-t_2) - \dots \\ &= \sum_k (-1)^k \mathbb{1}(t-t_k) \end{aligned} \quad (1)$$

となる。

(1) の両辺を  $t$  で微分して

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(x)}{dt} &= \frac{d\phi(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \\ &= \sum_k (-1)^k \frac{d\mathbb{1}(t-t_k)}{dt} \\ &= \sum_k (-1)^k \delta(t-t_k) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに  $\sum_k$  はすべての  $k$  についての和を意味する。そこで、

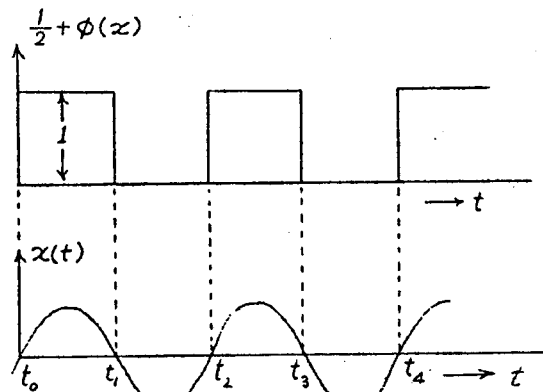
$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \delta(x(t))$$

なる関係を用いて (2) 式をかきなおすと、

$$\delta(x(t)) = \sum_k (-1)^k \frac{\delta(t-t_k)}{x'(t_k)} \quad (3)$$

となる。

$x(t)$  なる関数は  $t=t_k$  でその符号をかえ、したがってもし  $x'(t)$  が  $t=t_k$  で連続ならば  $x'(t_k)$  は順次その符号をかえ、大きさは同じであ



付第2図

るから、

$$x'(t_k) = (-1)^k |x'(t_k)| \quad (4)$$

となる。(4) 式を (3) 式に代入すると、

$$\delta(x(t)) = \sum_k \frac{\delta(t-t_k)}{|x'(t_k)|} \quad (5)$$

を得る。これが本文 (2.26) 式である。

このように  $\delta(x(t))$  はあるインパルス関数の系列であらわし得るがそのインパルスの強さは  $1/|x'(t_k)|$  に等しい。

$t_k = k\pi/\omega$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) の場合、 $|x'(t_k)|$  は  $k$  のすべての値について同一値をとるから、

$$\delta(x(t)) = \frac{1}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|} \sum_k \delta(t - k\frac{\pi}{\omega}) \quad (6)$$

となる。

もしリレー特性が  $y(x) = M \frac{x}{|x|}$  であれば、

$$\frac{dy(x)}{dx} = 2M\delta(x(t))$$

であるから (6) 式を用いて、

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{2M}{|x'(\frac{\pi}{\omega})|} \sum_k \delta(t - k\frac{\pi}{\omega}) \quad (7)$$

となる。これが本文 (2.27) 式である。

(7) 式からわかるように、 $dy(x)/dx$  はあるインパルス関数 (デルタ関数) の系列でその周期が  $\pi/\omega$  に等しいことがわかる。これらのインパルスの強さは一定で  $2M/|x'(\pi/\omega)|$  に等しい。

次に  $x'(t)$  が  $t=t_k$  で不連続な場合を考える。

この場合  $\delta(x(t))$  をインパルス関数の系列であらわしたとすると、そのインパルスの強さは  $t=t_k+0$  と  $t_k-0$  とで値が異なるはずである。すなわち付4図(a)で示すように  $t=t_k$  でのインパルス関数を  $t_k$  の両側に  $\frac{\varepsilon}{2}$  の幅を持つ矩形波と考えるとインパルスの強さは  $\varepsilon \rightarrow 0$  のときのこの矩形波の面積と考えられる。しかして  $t=t_k$  でのインパル

スの強さは結局この2つの短形波の面積の和に等しいから、付4図(b)に示すようにこのときのインパルスの強さを

$$\frac{1}{|x'_m(t_k)|}$$

とすると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|x'_m(t_k)|} \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{x'(t_k-0)} + \frac{1}{x'(t_k+0)} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{x'(t_k-0) + x'(t_k+0)}{x'(t_k-0) x'(t_k+0)} \right| \end{aligned} \quad (8)$$

となる。そこで、この場合、

$$\delta(x(t)) = \sum_k \frac{\delta(t-t_k)}{|x'_m(t_k)|} \quad (9)$$

であるから、リレー特性が  $y(x) = M \frac{x}{|x|}$  の場合、(8)式より、

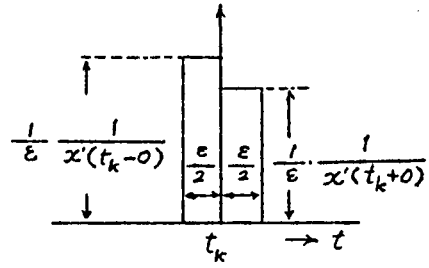
$$\frac{dy(x)}{dx} = \sum_k \frac{M}{\left| \frac{x'(t_k+0) \cdot x'(t_k-0)}{x'(t_k+0) + x'(t_k-0)} \right|} \delta(t-t_k) \quad (10)$$

となる。(10)式において  $t_k = k \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) であれば、インパルスの強さの絶対値は  $k=0$  のときのそれに等しいことから、

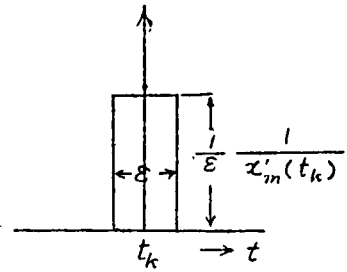
$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{M}{\left| \frac{x'(\frac{\varphi_2}{\omega}+0) \cdot x'(\frac{\varphi_2}{\omega}-0)}{x'(\frac{\varphi_2}{\omega}+0) + x'(\frac{\varphi_2}{\omega}-0)} \right|} \sum_k \delta(t - k \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi_2}{\omega}) \quad (11)$$

となる。

(11)式において  $y(x) \rightarrow f'(\theta)$ ,  $x \rightarrow \theta'$ ,  $M \rightarrow F$  とおけば本文の(2.28)式を得る。



付4図(a)



付4図(b)



## 参 考 文 献

- (1) 平井、桑原：電気学会雑誌、Vol. 81, pp 1870-1876 (昭 36).
- (2) P. J. Den Hartog : Phil. Mag. Vol. 9, pp 801-817 (1930).
- (3) J. Tou and P. M. Schultheiss : Jour. Appl. Phys., Vol 24, No. 9, pp 1210-1217 (1953).
- (4) V. B. Hass: Trans. AIEE, Vol. 72, pt II, pp 119-126 (1953).
- (5) M. Y. Silberberg : Trans. AIEE, Vol. 75, pt. II, pp 423-425 (1956).
- (6) 桑原 : 制御工学, Vol 3, No. 4, pp 223-230 (昭 34).
- (7) 桑原、平井、井上、竹原 : 電気学会雑誌, Vol 80, pp 1780-1789 (昭35)
- (8) C. R. Wylie : Advanced Engineering Mathematics, McGraw Hill, pp 178-182 (1951).
- (9) 桑原、平井、並平 : 電気学会雑誌, Vol 81, pp 1860-1869 (昭36).
- (10) Ya. Z. Tyarkin (林 沢) : リレー式自動制御系の理論、日刊工業 (昭 35)
- (11) 林、坂和 : 電気学会雑誌、Vol 80, pp 280-287 (昭 35)
- (12) 文献 (10), pp 240-268.
- (13) 全上 pp 391-392
- (14) R. C. Oldenbourg and H. Sartrius (高橋、伊沢 訳) : 自動制御の力学、誠文堂、pp 192-197 (昭 28)
- (15) 林、桑原、平井 : 電気関係学会関西支部連合大会講演論文集, 4-13 (昭 36)
- (16) 真鍋 : 電気学会雑誌, Vol 81, pp 1803-1812 (昭 36)
- (17) 西村、津村、大道 : 制御工学, Vol 4, No. 1, pp 35-39 (昭 35)
- (18) 林、桑原、平井 : 第4回自動制御連合講演会論文集 117 (昭 36)
- (19) E. P. Popow : Dynamic Automatischer Regelsysteme, Akademie-Verlag Berlin, pp 226-232 (1958).
- (20) 坂和 : 日本自動制御協会研究例会資料, No. 188 (昭 36)

- (21) 桑原、平井 : 電気四学会連合大会講演論文集 258 (昭 37)
- (22) W. J. Cunningham : Jour. Frank. Inst., Vol 261, pp 621-629 (1956)
- (23) J. S. Jacobsen : Jour. Appl. Mech., Vol. 19, pp 543-553 (1952).
- (24) R. N. Buland : Jour. Frank. Inst., Vol. 257, pp 37-48 (1954).
- (25) 文献 (9) pp 1864-1867.
- (26) 林、桑原、平井 : 電気関係学会関西支部連合大会講演論文集 4-12 (昭 36)
- (27) R. A. Bruns and R. M. Saunders : Analysis of Feedback Control systems, McGraw Hill, pp 40-41 (1955).
- (28) 沼倉、三浦 : 電気学会雑誌, Vol 77, pp 1-8 (昭 32)
- (29) 文献 (10) pp 215-239
- (30) R. J. Kochenburger : Trans. AIEE, Vol 69, pt I, pp 270-284 (1950).
- (31) J. H. Liversidge : "Automatic and Manual Control" Tustin ed., pp 343-375, (1952).
- (32) E. A. Freeman : Trans. AIEE, Vol 78, pt II, pp 680-691 (1959).
- (33) H. Thomas : Trans. ASME, Vol 77, pp 1365-1382 (1954).
- (34) K. N. Satyendra : Trans. AIEE, Vol 75, pt II, pp 243-249 (1957).
- (35) M. P. Pastel and G. J. Thaler : Trans. AIEE, Vol 79, pt II, pp. 215-219. (1960).
- (36) 桑原、平井、井上 : 電気学会雑誌, Vol 82, pp. 172-176 (昭 37)
- (37) 林、桑原、平井 : 電気四学会連合大会講演論文集, 251 (昭 37)
- (38) W. W. Solodownikow : Grundlagen der selbsttätigen Regelung. Bd. 2., Akademie Verlag, Berlin, pp 982-985, (1959).
- (39) 文献 (10), pp 392-393.